Københavns Universitet
Det naturvidenskabelige fakultetvinteren 1994-95

Matematik 1 LA, nyt pensum

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Ingen hjælpemidler (ud over skriveredskaber) må medbringes.

Opgaverne vægtes med nedenstående procentangivelser.

Stilopgave 2 (50%)

Lad V være et vektorrum og $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ en mængde af vektorer fra V.

1° Definer følgende begreber a) $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ udspænder V, b) $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er lineært uafhængig, c) $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en basis for V.

2° Antag at $\text{span}\{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n\} = V$ og at $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ er en lineært uafhængig delmængde af V. Vis, at $n \geq m$.

3° Vis, at to baser for V har det samme antal elementer.

4° Antag at $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en lineært uafhængig delmængde af V og at $\mathbf{v}_{n+1} \in V$ ikke tilhører $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$. Vis, at $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}\}$ er lineært uafhængig.

Problemopgaver (50%)

Opgave 1 (20%)

Lad A være 3×4 matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

1° Find rangen af A og bestem en basis for søjlerummet for A.

2° Afgør om $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ tilhører søjlerummet.

3° Bestem løsningsmængden $L \subseteq \mathbb{R}^4$ til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 , \\ 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 , \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Opgave 1 fortsættes på side 2

Gør rede for, at L er et to-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^4$.

4° Vis, at $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en enhedsvektor tilhørende L, og find $\mathbf{v}_2 \in L$ så $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortonormal basis for L.

Opgave 2 (15%)

Lad B være 3×3 matricen

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

1° Vis, at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ opfylder ligningen $B\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

2° Bestem B's egenværdier og de tilhørende egenrum.

3° Er B diagonaliserbar? Svaret ønskes begrundet.

Opgave 3 (15%)

I vektorrummet $\mathbb{P}_2$ af polynomier af grad ≤ 2 med sædvanlig addition vælges den ordnede basis $B = \{1, x, x^2\}$.

Lad $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ være en lineær afbildning med egenskaberne

$$T(1) = x + 1 \,,\ T(x) = (x+1)^2 \,,\ T(x^2) = 1 \,.$$

1° Find T's matrix M med hensyn til basis B.

2° Vis, at M er invertibel og find den inverse matrix M^{-1}.

3° Find det polynomium $p \in \mathbb{P}_2$ for hvilket $T(p) = x^2$.

Hermed slutter eksamensopgaverne i **nyt** pensum.
Udfyld skemaet på næste side og læg det ved besvarelsen.

Christian Berg, Kjeld Bagger Laursen