Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.
Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt løste. (Delvist løste opgaver medregnes).

Opgave 1.

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad 2\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - 3x + t\, e^{\frac{t}{2}} \quad , \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Find mængden L af maksimale reelle løsninger til $(*)$.

2) Bestem de løsninger $x = \varphi(t)$ fra L, der opfylder $\varphi'(0) = 0$.

Opgave 2.

Mængden af reelle talfølger $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opfattes på sædvanlig måde som afbildningsrummet $\mathbb{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ af afbildninger fra $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{R}$, og som bekendt er $\mathbb{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et metrisk rum i udvidet forstand ved fastsættelsen

$$\mathrm{Dist}((a_n),(b_n)) = \sup\{|a_n-b_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(Der skrives kort (a_n) i stedet for $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Det metriske rum i udvidet forstand $(\mathbb{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),\mathrm{Dist})$ betegnes kort F.
(De ovennævnte resultater ønskes ikke vist).

(opgaven fortsættes)

1) Vis, at mængden C af følger $(a_n) \in F$, for hvilke $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, er en afsluttet delmængde af F.

Lad (M,dist) være et vilkårligt metrisk rum og lad $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af ikke tomme delmængder af M. For hvert $x \in M$ defineres på sædvanlig måde $\mathrm{dist}(x,A_n)$, afstanden fra x til A_n. Ved til $x \in M$ at lade svare følgen $(\mathrm{dist}(x,A_n))_{n\in\mathbb{N}} \in F$ defineres en afbildning $f: M \to F$.

2) Vis, at f er afstandsformindskende.

Med betegnelserne ovenfor indfører vi en delmængde $A \subseteq M$ bestående af de punkter $x \in M$, for hvilke der findes en følge (x_n) så $x_n \in A_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og så $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

3) Vis, at $x \in A$ hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(x,A_n) = 0$.

4) Vis, at A er en afsluttet delmængde af M.

Opgave 3.

Lad I betegne et åbent interval og $f : I \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion.

Funktionen f kaldes differentiabel fra højre i et punkt $x \in I$ såfremt følgende grænseværdi eksisterer i $\mathbb{R}$:

$$D^+f(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} .$$

Funktionen f kaldes differentiabel fra højre, hvis den er differentiabel fra højre i ethvert punkt af I.

(opgaven fortsættes)

1) Vis, at hvis f er voksende og hvis f er differentiabel fra højre i et punkt $x \in I$, så er $D^+f(x) \geq 0$.

2) Vis, at hvis f er en kontinuert funktion, der er differentiabel fra højre, og hvis der findes $c>0$ så $D^+f(x) \geq c$ for alle $x \in I$, så er f voksende. (Vink: Antag at der findes punkter $a,b \in I$, $a < b$, så $f(a) > f(b)$ og betragt $b_0 = \sup\{x \in [a,b[\mid f(a) \leq f(x)\}$. Vis, at $b_0 < b$ og $f(a) = f(b_0) > f(x)$ for $x \in]b_0,b[$ og nå derved til en modstrid).

3) Vis, at hvis f er en kontinuert funktion, der er differentiabel fra højre og hvis $D^+f(x) \geq 0$ for alle $x \in I$, så er f voksende.
(Vink: Se på $f(x) + cx$ for $c > 0$.)

Opgave 4.

Lad a og b være givne positive reelle tal.

1) Vis, at den uendelige række

$$\frac{x^a}{a} - \frac{x^{a+b}}{a+b} + \frac{x^{a+2b}}{a+2b} - \frac{x^{a+3b}}{a+3b} + \dots + (-1)^n \frac{x^{a+nb}}{a+nb} + \dots$$

er konvergent for ethvert $x \in [0,1]$ med en sum som betegnes $f(x)$.

2) Vis, at rækken ovenfor konvergerer uniformt mod f på intervallet $[0,1]$, og at $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion.

(Opgaven fortsættes)

3) Vis, at f er differentiabel på det åbne interval $]0,1[$ og at $f'(x) = \frac{x^{a-1}}{1+x^b}$ for $x \in]0,1[$.

4) Vis formlen

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{a+nb} + \cdots .$$

(Der gøres opmærksom på at integralet er uegentligt hvis $0 < a < 1$.)

Opgave 5.

Betragt den plane C^∞-kurve med parameterfremstillingen

$$(x(t),y(t)) = (t-\sin\tfrac{\pi}{2}t, \cos\tfrac{\pi}{2}t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

1) Vis, at kurven er konveks i ethvert punkt.

2) Vis, at der findes et mindste tal $T > 0$ så

$$(x(t+T),y(t+T)) = (x(t)+T,y(t)) \quad \text{for alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

og find dette T.

3) Vis, at kurven $(x(t),y(t))$ for $t \in [-1,1]$ en en lukket kurve, og at betingelserne for at anvende arealformlen er opfyldt. Find endelig arealet af det område, som den lukkede kurve omslutter.

4) Skitser kurven.