KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1976/77.

Matematik 102.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave 1.

a) Bestem de reelle tal $\alpha \neq 0$, for hvilke rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{\alpha^{n}}$$

er absolut konvergent.

b) For hvilke reelle $\alpha \neq 0$ er rækken betinget konvergent?

Opgave 2.

Med S betegnes enhedscirklen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

Lad $A \subset S$ være en delmængde, der opfylder følgende betingelse: For ethvert punkt $(x,y) \in S$ tilhører netop ét blandt punkterne (x,y) og $(-x,-y)$ mængden A.

a) Gør rede for, at der ved tilordningen $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ defineres en kontinuert afbildning φ af A på $S \setminus A$.

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

b) Bevis at A ikke er afsluttet relativt til S.

c) Vis, at A ikke er åben relativt til S.

Opgave 3.

Bestem de maksimale løsninger til differentialligningen

$$\sin t \cdot \frac{dx}{dt} - \cos t \cdot x = -1 \ .$$

Opgave 4.

Betragt den plane kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{3} \cdot t \\ y(t) &= t\sqrt{t+1} \end{aligned} \quad , \qquad t \in \,]-1, +\infty[$$

a) Bestem buelængden $s = s(t)$ regnet udfra $t = 0$.

b) Bevis, at kurven har en veldefineret krumning κ, samt at $\kappa > 0$ i ethvert punkt.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 5.

Lad $(g_n(x))$ være en følge af reelle funktioner på en ikke-tom mængde X der konvergerer uniformt mod 0, og som yderligere tilfredsstiller, at $g_{n+1}(x) \leqq g_n(x)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in X$.

a) Vis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} g_n(x)$ er uniformt konvergent på X.

b) Benyt det ovenstående til at vise, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^3 x}$ konvergerer uniformt på intervallet $[1, +\infty[$ med en kontinuert sumfunktion $f(x)$.

c) Gør rede for, at det uegentlige integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ eksisterer, og beregn dets omtrentlige værdi som afrundet decimalbrøk med 2 rigtige decimaler.