KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1977

Matematik 102, skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler kan medbringes.

Opgave 1

Lad (X,dist) betegne et ikke-tomt kompakt metrisk rum.

1) Vis, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes en endelig delmængde $A_\varepsilon \subseteq X$ så $\bigcup_{x \in A_\varepsilon} K(x,\varepsilon) = X$.

2) Vis, at der findes en overalt tæt delmængde $A \subseteq X$, der er endelig eller numerabel.

3) Bevis, at der findes en endelig overalt tæt delmængde $A \subseteq X$, hvis og kun hvis X er endelig.

Opgave 2

Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ betegne en potensrække med konvergensradius ρ, hvor $0 < \rho < +\infty$. Med D betegnes den åbne konvergenscirkel, dvs. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$, og dermed $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho\}$. Idet $f: D \to \mathbb{C}$ betegner sumfunktionen for potensrækken, antager vi nu, at rækken konvergerer uniformt mod f på hele D.

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

1) Vis, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer for alle $x \in \overline{D}$, altså også på randen af konvergenscirklen.

2) Vis, at der ved formlen

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \quad x \in \overline{D}$$

defineres en kontinuert funktion $g:\overline{D} \to \mathbb{C}$, hvis restriktion til D er lig med f.

3) Bestem konvergensradius for rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ og undersøg om rækken konvergerer uniformt på hele den åbne konvergenscirkel.

Opgave 3

Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2 - \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = 2x_1 - x_2 + 2\dfrac{dx_2}{dt} \end{cases} , \quad (t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Find samtlige løsninger $(x_1(t), x_2(t))$.

2) Bestem de løsninger $(x_1(t), x_2(t))$, der opfylder betingelsen $(x_1(0), x_2(0), x_2'(0)) = (1,\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 4

Lad funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for} \quad 0 < x < 1 , \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for} \quad -1 < x < 0 , \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1) Bestem den Fourier transformerede af f.

2) Vis, at det uegentlige integral

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos y}{y} \sin(xy)\,dy$$

eksisterer for ethvert $x \in \mathbb{R}$, og find dets værdi.

Opgave 5

På rummet af tilladte funktioner $S = C^2([0,1],\mathbb{R})$ defineres funktionalen

$$I(f) = \int_0^1 [\tfrac{1}{2}(f'(x))^2 + f(x)f'(x) + f(x) + f'(x)]\,dx , \qquad f \in S.$$

1) Vis, at I hverken har globalt maksimum eller globalt minimum.

2) Idet det kan tages for givet, at der findes et $f_0 \in S$, så I har lokalt minimum i f_0, skal man finde f_0.

(opgavesættet slut).