KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1976

MATEMATIK 102

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1

Betragt den plane C^∞-kurve, der er givet ved parameterfremstillingen

$$(x,y) = (\sin 2t, \sin t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

1) Begrund, at buelængden $s = \varphi(t)$ regnet udfra punktet svarende til $t = 0$ kan benyttes som parameter på kurven.

Lad $\kappa = \kappa(s)$ betegne krumningen som funktion af s.

2) Vis, at kurvens tangentdrejning θ udfra punktet $t = 0$, som funktion af t, er givet ved

$$\theta(t) = \int_0^t \kappa(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau.$$

3) Gør uden at udregne integralet ovenfor rede for, at det kan udtrykkes ved hjælp af velkendte funktioner af t.

4) Tegn en løs skitse af kurven, og beregn arealet af den figur, der omsluttes af den til parameterintervallet $[0,\pi]$ svarende del af kurven.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 2

Lad k være en reel konstant og lad $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π, der på intervallet $[-\pi,\pi]$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \\ kx, & |x| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

1° Find Fourierrækken for f.

2° Gør rede for at Fourierrækken er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$. Angiv rækkens sumfunktion.

3° Find alle værdier af k for hvilke Fourierrækken er uniformt konvergent.

Opgave nr. 3

Lad $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Betragt differentialligningen

$$t\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + tx = f(t)\exp(t) \qquad (*)$$

(opgaven fortsættes)

1° Gør rede for eksistens- og entydighedssætningens anvendelighed på (*) og beskriv definitionsmængden for en maximal løsning til (*).

2° Vis at $\varphi(t)$ er en løsning til (*) hvis og kun hvis $\varphi(t)\exp(-t)$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f(t)}{t} \qquad (**)$$

3° Find mængden af maximale løsninger til (*).

4° Antag nu, at $f(t) = t^2\exp(-2t)$ for $t \in]0,\infty[$. Gør rede for, at (*) i dette tilfælde har netop én maximal løsning, der er begrænset.

Opgave nr. 4

1) Opstil Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx,$$

hvor a_1 og a_2 er reelle konstanter, så $0 < a_1 < a_2$.

Antag, at $y = f(x)$ er en stationær funktion for I defineret på et delinterval af $\mathbb{R}_+$.

2) Bevis, at grafen for f ligger på en halvlinie parallel med x-aksen eller på en kvart cirkelbue med centrum på y-aksen.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 5

Lad $C \subseteq \mathbb{R}^2$ være en kompakt delmængde, der tillige opfylder:

a) C er konveks. [Det betyder, at for $\underline{x},\underline{y} \in C$ og $t \in [0,1]$ vil $t\underline{x} + (1-t)\underline{y} \in C$.]

b) Der findes et $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, så den åbne kugle $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2 < r^2\}$ er indeholdt i C.

c) $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \underline{x} \in C \Rightarrow -\underline{x} \in C$.

Lad $y \in \mathbb{R}^2$. Idet $\lambda C = \{\lambda\underline{x} \mid \underline{x} \in C\}$ for et vilkårligt $\lambda \in \mathbb{R}$, definerer vi

$$\|\underline{y}\| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0;\ \underline{y} \in \lambda C\}.$$

1) Vis, at $0 \leq \|\underline{y}\| < +\infty$ for alle $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$, samt at $\|\underline{y}\| > 0$ for $\underline{y} \neq \underline{0}$.

2) Gør rede for at $\|\alpha\cdot\underline{y}\| = |\alpha|\cdot\|\underline{y}\|$, hvor $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, og $|\alpha|$ betegner den numeriske værdi af α.

3) Bevis, at $C = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$.

4) Gør rede for, at hvis $\underline{x} \neq \underline{0}$ og $\underline{y} \neq \underline{0}$, da vil vektorerne $\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$, $\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}$ og $\frac{\underline{x}+\underline{y}}{\|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|}$ alle tilhøre C.

5) Bevis, at $\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|$ er en norm på $\mathbb{R}^2$.