KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1975.

MATEMATIK 102

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1

1° Lad $b \in [0,1[$. Vis, at for $n = 0,1,2,\cdots$ gælder

$$\int_0^b \frac{x^{n+1}}{1-x}dx = -\log(1-b) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b^k}{k}.$$

2° Gør rede for, at det uegentlige integral $\int_0^1 x^n \log(1-x)dx$ eksisterer for alle $n = 0,1,2,\cdots$ og har værdien

$$\int_0^1 x^n \log(1-x)dx = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Opgave nr. 2

Lad $f: [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Antag, at der findes en funktion $g: [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ som er uniformt kontinuert på $[1,+\infty[$ og for hvilken $|f(x) - g(x)| \to 0$ for $x \to +\infty$.

1° Vis, at f er uniformt kontinuert på $[1,+\infty[$.

2° Vis, at funktionen $f(x) = x\cdot\exp(\frac{1}{x})$ er uniformt kontinuert på $[1,+\infty[$.

(opgavesættet fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1975
Mat 102

Rettelse til opgave 3.

a) Korrekt formulering af opgavens to første linier:

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π der i $]-\pi,\pi]$ er givet ved ...

b) Præcisering af opgave 3, 3°: Den omtalte funktion F er en funktion fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$.

KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1975
Mat 102.

Rettelse til opgave 3.

a) Korrekt formulering af opgavens to første linier:

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π der i $]-\pi,\pi]$ er givet ved ...

b) Præcisering af opgave 3, 3°: Den omtalte funktion F er en funktion fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$.

Opgave nr. 3

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π der i $[-\pi,\pi]$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pi. \end{cases}$$

1° Vis, at $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$.

2° Gør rede for Fourierrækkens punktvise konvergensforhold. Undersøg om Fourierrækken er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$.

3° Find Fourierrækken for den funktion F, der er periodisk med periode 2π, og som i $[-\pi,\pi]$ er givet ved $F(x) = x^2$. Besvar spørgsmål 2° for Fourierrækken for F.

Opgave nr. 4

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion og betragt følgende differentialligningssystem på $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1 \cdot f(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \cdot f(x_1^2 + x_2^2).$$

1° Gør rede for, at eksistens- og entydighedssætningen kan anvendes på ovenstående system.

(opgaven fortsættes)

2° Vis, at for $r \in \mathbb{R}_+$ med $f(r^2) = 0$ og $t_0 \in \mathbb{R}$, vil $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (r\cdot\cos(t-t_0), r\cdot\sin(t-t_0))$ for $t \in \mathbb{R}$ være den entydigt bestemte maksimale løsning for hvilken $(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) = (r,0)$. Skitser denne løsning.

3° Lad $0 < r_1 < r_2$ og antag, at $f(r_1^2) = f(r_2^2) = 0$. Betragt den åbne mængde

$$D = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1^2 < x_1^2 + x_2^2 < r_2^2\} .$$

Vis, at en løsning $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)): J \to \mathbb{R}^2$ til systemet defineret på et interval $J \subseteq \mathbb{R}$ forløber helt i D, såfremt der findes et $t_0 \in J$ for hvilket $(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0)) \in D$.

4° Antag, at f har endeligt mange nulpunkter på $\mathbb{R}_+$. For ethvert $r \in \mathbb{R}_+$ med $f(r^2) = 0$ og ethvert $t_0 \in \mathbb{R}$ vil løsningen $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (r\cdot\cos(t-t_0), r\cdot\sin(t-t_0))$ for $t \in \mathbb{R}$ være en periodisk løsning til systemet, d.v.s en løsning defineret på hele $\mathbb{R}$ for hvilken der findes et $T \in \mathbb{R}_+$ så $(\varphi_1(t+T), \varphi_2(t+T)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Vis, at disse løsninger sammen med løsningen $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (0,0)$ for $t \in \mathbb{R}$ udgør samtlige periodiske løsninger til systemet.

(Vink: Man kan f.eks. for en vilkårlig løsning (φ_1,φ_2) betragte $\frac{d}{dt}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$.)

(opgavesættet fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1975
Matematik 102.

Opgave nr. 5

Lad (X,dist) være et metrisk rum.

1^0 Lad (a_n) være en fundamentalfølge i X.

a) Sæt $\delta_n = \sup\{\mathrm{dist}(a_p,a_q) \mid p \geq n,\ q \geq n\}$ og vis, at $\delta_n \to 0$ for $n \to \infty$.

b) Gør rede for, at man kan finde en delfølge (a_{n_k}) for hvilken $\mathrm{dist}(a_{n_k},a_{n_{k+1}}) \leq 2^{-(k+1)}$ for $k = 1,2,\cdots$.

c) Antag, at (a_{n_k}) er en sådan delfølge. Lad $K_k = \{x \in X \mid \mathrm{dist}(x,a_{n_k}) \leq 2^{-k}\}$ og vis, at

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_k \supseteq \cdots \quad .$$

d) Med $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$ som i c) antag, at

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \emptyset.$$

Vis, at (a_{n_k}) er konvergent.

2^0 Lad (a_n) være en fundamentalfølge i X og (a_{n_k}) være en delfølge. Vis, at hvis (a_{n_k}) er konvergent, da er (a_n) konvergent.

3^0 Antag nu, at (X,dist) opfylder følgende betingelse:

For en vilkårlig følge af elementer (a_n) i X og af afsluttede kugler $K_n = \{x \in X \mid \mathrm{dist}(x,a_n) \leq 2^{-n}\}$ for hvilke $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots$ gælder, at $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Vis, at i så fald er (X,dist) et fuldstændigt metrisk rum.

(vend)