Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1974-75

MATEMATIK 102

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1

1° Gør rede for, at der ved

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{\exp x - (1+x)} \quad \text{for} \quad x > -1,\ x \neq 0$$

defineres en funktion $f\colon]-1,\infty[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$.

2° Vis, at der findes netop én kontinuert funktion $g\colon]-1,\infty[\to \mathbb{R}$ med

$$f(x) = \frac{2}{x} + g(x) \quad \text{for} \quad x > -1,\ x \neq 0.$$

Angiv $g(0)$.

3° Undersøg, om det uegentlige integral $\int_0^1 f(x)dx$ existerer.

Opgave nr. 2

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval, der indeholder 0, og lad $f\colon I \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, som tilfredsstiller ligningen

$$(*) \qquad f(t) = \int_0^t \cos^2(f(u))du$$

for alle $t \in I$.

(opgaven fortsættes)

1° Gør rede for, at f er uendeligt ofte differentiabel og tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 x$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0) = 0$.

2° Gør uden at løse ligningen (*) rede for, at der findes præcis én kontinuert funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller (*).

3° Bestem funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omtalt i 2°.

Opgave nr. 3

Lad M være et kompakt metrisk rum og lad $A = C^0(M,\mathbb{C})$ være vektorrummet af kontinuerte funktioner fra M ind i $\mathbb{C}$ (med de sædvanlige punktvise kompositioner).

Ved

$$\|h\| = \sup\{|h(t)| \mid t \in M\} \quad \text{for} \quad h \in A$$

defineres en norm $\|\cdot\|$ på A (altså en afbildning $\|\cdot\|: A \to [0,\infty[$ med egenskaberne

(i) $\forall h \in A: \|h\| = 0 \iff h = \underline{0}$ ($\underline{0}$ betegner nulvektoren i A);

(ii) $\forall h \in A\ \forall \lambda \in \mathbb{C}: \|\lambda h\| = |\lambda|\ \|h\|$;

(iii) $\forall h,k \in A: \|h+k\| \leqq \|h\| + \|k\|$).

[Dette ønskes <u>ikke</u> vist].

(opgaven fortsættes)

Som bekendt giver så $\|\cdot\|$ anledning til en afstandsfunktion (metrik) $\mathrm{dist}: A\times A \to [0,\infty[$ ved fastsættelsen

$$\mathrm{dist}(f,g) = \|f-g\| = \sup\{|f(t)-g(t)| \mid t \in M\} \quad \text{for} \quad f,g \in A.$$

[Ønskes heller <u>ikke</u> vist].

For $f,g \in A$ defineres en funktion $fg \in A$ ved

$$(fg)(t) = f(t)g(t) \quad \text{for} \quad t \in M$$

(er $f = g$, skrives f^2 for fg).

1° Vis, at $\|fg\| \leqq \|f\|\|g\|$ for alle $f,g \in A$.

For hvert $\eta \in \mathbb{R}_+$ sættes $E_\eta = \{f \in A \mid \|f\| \leqq \eta\}$.

2° Vis, at (E_η, dist) er et fuldstændigt metrisk rum for ethvert $\eta \in \mathbb{R}_+$.

Lad der nu være givet et element $a \in A$ med $\|a\| < 1$.

3° Lad $\eta \in [\|a\|,1[$. Vis, at der ved

$$T_\eta(f) = \tfrac{1}{2}(a+f^2) \quad \text{for} \quad f \in E_\eta$$

defineres en afbildning $T_\eta: E_\eta \to E_\eta$.

Vis, at T_η er en kontraktion.

4° Gør rede for, at der findes ét og kun ét element $f \in A$ med $\|f\| \leqq \|a\|$, som opfylder

$$f^2 - 2f + a = 0.$$

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 4

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion med $f(0) = 0$.

1° Vis, at hvis k_1 og k_2 er reelle konstanter således at $k_1 < f'(0) < k_2$, da findes der et $\delta \in \mathbb{R}_+$ således at

$$k_1 x \leq f(x) \leq k_2 x$$

for alle $x \in [0,\delta]$.

2° Antag nu yderligere om funktionen f, at $f'(0) > 0$, og lad $(a_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ være en følge af reelle, ikke negative tal, der konvergerer mod 0. Vis så, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ er konvergent hvis og kun hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent.

3° Lad $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1)$ er divergent, og at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (a^{\frac{1}{2^n}} - 1)$ er konvergent.

Opgave nr. 5

Lad (M,dist) være et metrisk rum og lad $f_n: M \to \mathbb{R}$ være en følge af kontinuerte funktioner. Antag, at

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots$$

for ethvert $x \in M$, og at f_n konvergerer punktvis mod en kontinuert funktion $f: M \to \mathbb{R}$.

(opgaven fortsættes)

1° Betragt for ethvert $n \in \mathbb{N}$ og ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mængden

$$G_n(\varepsilon) = \{x \in M \mid |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\}.$$

Vis, at $G_n(\varepsilon)$ er en åben mængde i (M,dist).

2° Vis, at f_n konvergerer uniformt mod f på enhver kompakt mængde K i (M,dist).

3° Definer for hvert $n \in \mathbb{N}$ funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = \tan x \cdot e^{-nx} \quad \text{for} \quad x \in [0,1].$$

Vis, at følgen f_n er uniformt konvergent på $[0,1]$.

Bemærk spørgeskemaet på næste side.