Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen
Sommeren 1981

Matematik 102. Elementer af den klassiske analyse.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Sættet er på 3 sider og består af 4 opgaver.
Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.

Opgave 1

Lad $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,(2\operatorname{Arctan} x + \log(1+x)) - \frac{3}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+ .$$

1^0 Gør rede for, at

$$\operatorname{Arctan} x < x \quad \text{og} \quad \log(1+x) < x$$

for alle $x \in \mathbb{R}_+$, og vis, at f ikke antager værdien 0.

2^0 Vis, at $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to 0_+$, og find denne.

3^0 Undersøg, om integralet

$$\int_0^1 \frac{dx}{3x - 2\operatorname{Arctan} x - \log(1+x)}$$

eksisterer.

Opgave 2

Lad M betegne mængden af komplekse C^1-funktioner på intervallet $I = [0,1]$.

1^0 Vis, at funktionen $d: M \times M \to [0,\infty[$ givet ved

$$d(f,g) = |f(0) - g(0)| + \sup_{x \in I} |f'(x) - g'(x)|$$

er en metrik på M.

(Opgaven fortsættes)

2^0 Undersøg, om det metriske rum (M,d) er fuldstændigt.

På M betragtes nu også metrikken $d_1 : M \times M \to [0,\infty[$ givet ved

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

(Det ønskes ikke vist, at d_1 er en metrik.)

3^0 Lad f tilhøre M og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i M. Vis da implikationen

$$f_n \to f \text{ i } (M,d) \Rightarrow f_n \to f \text{ i } (M,d_1).$$

Undersøg endvidere, om den modsatte implikation gælder.

Opgave 3

Idet $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ er en given kontinuert funktion, betragtes afbildningen $T: C^0([0,1],\mathbb{R}) \to C^0([0,1],\mathbb{R})$, der fører en vilkårlig kontinuert funktion $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ over i $T\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ bestemt ved

$$T\varphi(t) = t + g(t) + \int_0^t (t-x)\varphi(x)\,dx, \qquad t \in [0,1].$$

1^0 Vis, at der findes netop én funktion $\varphi \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, som opfylder ligningen $T\varphi = \varphi$.

2^0 Her betragtes tilfældet $g(t) = \sinh 2t$, $t \in [0,1]$.
Vis da, at den entydigt bestemte funktion $\varphi \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, der opfylder ligningen $T\varphi = \varphi$, er af klasse C^2, og find φ.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 4

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad t\frac{dx}{dt} + 2x = g(t),$$

hvor $g: I \to \mathbb{R}$ er en funktion på et interval $I =]-\rho,\rho[$ med $\rho > 0$.

1° Lad først g være sum af en potensrække med konvergensradius $\geqq \rho$,

$$g(t) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad t \in I.$$

Vis da, at der findes én og kun én funktion $x = \varphi(t)$ på I, som er sum af en potensrække med konvergensradius $\geqq \rho$, og som er løsning til (*).

2° Nu antages kun, at $g: I \to \mathbb{R}$ er kontinuert.
Opskriv da samtlige løsninger til (*) på hvert af intervallerne $I_+ =]0,\rho[$ og $I_- =]-\rho,0[$.
Gør rede for, at der højst er én løsning til (*) på hele I.

3° Lad her g være af klasse C^1 på I, og lad $f: I \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}\int_0^t sg(s)ds & \text{for } t \in I\setminus\{0\} \\ \frac{1}{2}g(0) & \text{for } t = 0 . \end{cases}$$

Vis da, at f er differentiabel i 0, og find $f'(0)$.
(Vink: Man kan f.eks. udnytte, at

$$g(s) = g(0) + s\,g'(0) + s\,\varepsilon(s) .)$$

Gør endvidere rede for, at $x = f(t)$ tilfredsstiller (*) på hele I.