KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1979/80.

MATEMATIK 102

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1

Lad (M,dist) være et metrisk rum. For en punktfølge (x_n) på M og et punkt $x \in M$ betragtes udsagnene:

(a) $\lim x_n = x$,

(b) x er det eneste fortætningspunkt for følgen (x_n).

1. Vis, at (a) $\Rightarrow$ (b).
2. Vis, at hvis M er kompakt så gælder (b) $\Rightarrow$ (a).

Opgave 2

Lad (s_n) være en konvergent kompleks talfølge med grænseværdi s, og lad $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en bijektiv afbildning.

1. Vis, at talfølgen $(s_{\tau(n)})$ er konvergent med grænseværdi s.

Lad nu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en konvergent uendelig række med komplekse led og sum s, og lad $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en bijektiv afbildning med egenskaben

$$p = \sup\{|\tau(n)-n| \mid n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

2. Vis, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ er konvergent med sum s.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion. For $n \in \mathbb{N}$ defineres en funktion $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$f_n(x) = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x+t)\,dt = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

1. Gør rede for, at f_n er differentiabel for alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Vis, at følgen (f_n) konvergerer punktvis mod f.
3. Vis, at hvis f er uniformt kontinuert, så konvergerer (f_n) uniformt mod f.

Opgave 4

Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en C^1-funktion som er periodisk med periode 2π og lad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

være Fourier rækken hørende til f.

1. Gør rede for, at rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|c_n|^2$ er konvergent og at

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

2. Gør rede for, at afsnitsfølgen $s_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{inx}$ konvergerer uniformt mod f og vis, at

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx .$$

(Vink: Vis og udnyt, at $s_k(x)\overline{s_k(x)}$ konvergerer uniformt mod $|f(x)|^2$.)

(Opgaven fortsættes)

(opgave 4 fortsat)

3. Vis, at hvis $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ så gælder

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx ,$$

og at de to størrelser er ens hvis og kun hvis

$$f(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} .$$

Opgave 5

Betragt $\mathbb{R}^2$ udstyret med den til maksimumsnormen hørende metrik og afbildningen $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$\varphi(x,y) = (\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{3}y - 2, \ \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{3}y + 3) \quad \text{for} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Vis, at φ er en kontraktion, og angiv den mindste kontraktionskonstant for φ.
2. Gør rede for, at φ har netop ét fikspunkt og find dette.

$\left(-\frac{25}{14}, \frac{111}{56}\right)$

Opgave 6

Lad $a_1 < a_2$ være reelle tal og betragt variationsintegralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} (y'\cosh x)^2 dx .$$

1. Opstil og find den fuldstændige løsning til Eulers differentialligning hørende til integralet I.
2. Vis, at der til givne endepunkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) findes præcis én løsning og angiv denne.