KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1977/78

MATEMATIK 102

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere. Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt løste. (Delvist løste opgaver medregnes).

Opgave 1.

Lad funktionen $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$Q(x) = \sin^3 x - \sin^2 x - 8\sin x + 12, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Bestem værdimængden (billedmængden) for Q.

2) Find værdien af det bestemte integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{7\sin 2x - 8\cos x}{Q(x)}\, dx .$$

Opgave 2.

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = 1 - y^2 , \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Vis, at hvis $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval og $y: I \to \mathbb{R}$ er en løsning til (*), der ikke antager værdien nul, da er $\frac{1}{y} : I \to \mathbb{R}$ også en løsning til (*).

2) Begrund, at der for ethvert $a \in \mathbb{R}$ findes netop en maksimal løsning $\varphi_a: I_a \to \mathbb{R}$ til (*), der opfylder $0 \in I_a$, $\varphi_a(0) = a$.

3) Bestem for hvert $a \in \mathbb{R}$ funktionen φ_a og det maksimale definitionsinterval I_a.

Opgave 3.

Lad $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion.

1) Begrund, at der ved fastsættelsen

$$g(t) = \int_0^1 e^{xt} f(x)\,dx \,, \qquad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}$$

defineres en kontinuert funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2) Vis, at g er vilkårligt ofte differentiabel og at der gælder

$$g^{(n)}(t) = \int_0^1 e^{xt} x^n f(x)\,dx \,, \qquad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{og} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3) Idet Taylorrækken for g hørende til punktet $t = 0$ betegnes med $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, skal man angive a_n for $n = 0,1,2,\ldots$ samt finde rækkens konvergensradius.

4) Vis, at sumfunktionen for rækken $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ er $g(t)$, på hele konvergensintervallet.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 4.

Mængden $C^0([a,b],\mathbb{R})$ af reelle kontinuerte funktioner på det afsluttede interval $[a,b]$ gøres til et metrisk rum ved indførelse af afstandsfunktionen

$$\mathrm{dist}(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [a,b]\} .$$

Lad der være givet to funktioner $\alpha,\beta \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, hvor $\beta(x) \leqq 0$ for alle $x \in [a,b]$. Betragt ligningen

$$(*) \quad f^2 + \alpha\cdot f + \beta = 0 .$$

Ved en <u>løsning</u> til (*) forstås en funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, der tilfredsstiller $f(x)^2+\alpha(x)\cdot f(x)+\beta(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$. Med L betegnes mængden af <u>kontinuerte</u> løsninger til (*).

1) Vis, at L er en ikke-tom afsluttet delmængde af det metriske rum $(C^0([a,b],\mathbb{R}),\mathrm{dist})$.

2) Gør rede for, at der findes netop en funktion $f^- \in L$, så

$$I = \inf\{\int_a^b f(x)dx \mid f \in L\} = \int_a^b f^-(x)dx .$$

3) Bestem L, f^- og I i tilfældet $a = 0$, $b = 1$, $\alpha(x) = -x + \frac{1}{2}$, $\beta(x) = -\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2$.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 5.

Med $\underline{x}_1 = (p_1(t), p_2(t))$ og $\underline{x}_2 = (q_1(t), q_2(t))$ betegnes to plane kurver, defineret for $t \in \mathbb{R}$, hvor p_1, p_2, q_1 og q_2 er reelle polynomier i t. Idet vi indfører betegnelsen $\dot{p}(t)$ for $\frac{dp(t)}{dt}$ antages det, at

(a) $\dot{p}_1(t)$ og $\dot{p}_2(t)$ har ingen fælles reelle rødder,

(b) $\dot{q}_1(t)$ og $\dot{q}_2(t)$ har ingen fælles reelle rødder.

1) Gør rede for, at $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ er C^∞-kurver, samt at de begge har veldefinerede krumninger, $\kappa_1(t)$ og $\kappa_2(t)$.

Sæt $n = \max\{\text{grad } p_1(t), \text{grad } p_2(t)\}$, $m = \max\{\text{grad } q_1(t), \text{grad } q_2(t)\}$, og $r = 6(n+m-2)$. Antag nu yderligere, at $\kappa_1(t) > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, samt at der findes r forskellige værdier $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}$, så $\kappa_1(t_i) = \kappa_2(t_i)$, $i = 1, \ldots, r$.

2) Vis, at $\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$, for alle $t \in \mathbb{R}$.

Antag yderligere, at $\dot{p}_1^{\,2} + \dot{p}_2^{\,2} = \dot{q}_1^{\,2} + \dot{q}_2^{\,2}$ og at $\underline{x}_1(0) = \underline{x}_2(0) = (0,0)$. Betegn de to kurvers tangentdrejning udfra $t = 0$ med henholdsvis $\theta_1(t)$ og $\theta_2(t)$.

3) Vis, at $\theta_1 - \theta_2$ er en konstant, og slut at der findes et $z \in \mathbb{C}$ med $|z| = 1$, således at

$$p_1(t) + ip_2(t) = z(q_1(t) + iq_2(t)) ,$$

for alle $t \in \mathbb{R}$.