Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1980/81

MATEMATIK 102

Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.
Sættet er på 3 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

Lad $\mathbb{C}$ være den komplekse plan udstyret med den sædvanlige metrik.

En delmængde $A \subseteq \mathbb{C}$ siges som bekendt at være <u>konveks</u>, såfremt for alle $x,y \in A$ liniestykket

$$[x,y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$$

er indeholdt i A.

1) Vis, at afslutningen $\overline{A}$ af en konveks mængde $A \subseteq \mathbb{C}$ er konveks.

Lad nu $A \subseteq \mathbb{C}$ være en afsluttet og ubegrænset konveks delmængde af $\mathbb{C}$.

2) Vis, at der for hvert $x \in A$ findes et $z \in \mathbb{C}$ med $|z| = 1$ således at halvlinien

$$\{x + tz \mid t \geqq 0\}$$

er indeholdt i A.

Betragt mængden

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1 \vee (\mathrm{Re}z > 0 \wedge |\mathrm{Im}z| < 1)\}.$$

3) Skitser mængden A, og find mængden af $x \in A$, for hvilke der findes et $z \in \mathbb{C}$ med $|z| = 1$ og $\{x+tz \mid t \geqq 0\} \subseteq A$.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2

Betragt for $\varepsilon > 0$ funktionen $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|) & \text{for} \quad |x| \le \varepsilon, \\ 0 & \text{for} \quad |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

og lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuert.

1°. Vis, at funktionen $F_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$F_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)h_\varepsilon(t)\,dt = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)h_\varepsilon(t-x)\,dt \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R},$$

er af klasse C^1.

2°. Vis, at F_ε er af klasse C^2, og at

$$F''_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)-2f(x)) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3°. Vis, at hvis f er af klasse C^2 så gælder

$$f''(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F''_\varepsilon(x) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vink. Man kan benytte Taylor's grænseformel.

Opgave 3

Betragt for $t, x \in \mathbb{R}$ den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos nt, \qquad (*)$$

og lad for $r \in]0,1]$ mængden $D(r) \subseteq \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$D(r) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < r\}.$$

(Opgaven fortsættes)

(opgave 3 fortsat)

1°. Vis, at rækken (*) er punktvis konvergent på $D(1)$ og at (*) konvergerer uniformt på $D(r)$ for ethvert $r \in]0,1[$.

2°. Vis, at sumfunktionen $h: D(1) \to \mathbb{R}$ for (*), altså

$$h(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos nt \qquad \text{for} \quad (t,x) \in D(1),$$

er kontinuert.

3°. Vis, at for hvert $x_0 \in]-1,1[$ er funktionen $t \to h(t,x_0)$ af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ af klasse C^1.

Opgave 4

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og betragt differentialligningen

$$u''(x) + c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x) = 0, \quad (u \in C^2(I,\mathbb{R})) \qquad (**)$$

hvor $c_1, c_0 \in C^0(I,\mathbb{R})$ og $c_0(x) < 0$ for alle $x \in I$, og lad $[a,b] \subseteq I$ være et kompakt delinterval.

1°. Vis, at hvis $u \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ er en løsning til (**) på $[a,b]$ som opfylder $u(a) \geq 0$ og $u(b) \geq 0$ så gælder $u(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$.

Vink. Betragt et punkt $x_0 \in [a,b]$, hvor u antager sin mindste værdi.

2°. Vis, at hvis $u \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ er en løsning til (**) på $[a,b]$ som opfylder $u(a) = u(b) = 0$ så gælder $u(x) = 0$ for $x \in [a,b]$.

3°. Vis, at til givne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ findes netop én løsning $u \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ til (**) på $[a,b]$ som opfylder

$$u(a) = \alpha \quad \text{og} \quad u(b) = \beta.$$

Vink. Betragt f.eks. først tilfældet $\alpha = 0$.