KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1980

MATEMATIK 102

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.
Sættet er på 3 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

Lad A og B være ikke tomme delmængder af $\mathbb{R}^2$. Som sædvanlig betegner $A+B$ mængden

$$A+B = \{a+b \in \mathbb{R}^2 \mid a \in A \,;\, b \in B\} .$$

1) Vis, at hvis A er kompakt og B er afsluttet, så er $A+B$ afsluttet.

2) Vis, at hvis A og B begge er afsluttede og indeholdt i den afsluttede 1. kvadrant $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \,,\, y \geq 0\}$, så er $A+B$ afsluttet.

3) Gør rede for, at mængden $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \,,\, xy \geq 1\}$ er afsluttet og undersøg i hvert af tilfældene

   (i) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \,,\, y = 0\}$,

   (ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \,,\, y = -x\}$,

   om mængden $A+B$ er afsluttet.

Opgave 2

Lad $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være af klasse C^1 og antag, at $h(x) = 0$ for $|x| \geq 1$, og $\int_{-1}^{1} |h(x)|dx = 1$.

For $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ defineres en funktion $Tf: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{1} h(t)f(x-t)dt \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Vis, at $Tf \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ og, at

$$\sup\{|(Tf)(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \leq \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \leq +\infty .$$

2) Vis, at $Tf \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ og find $(Tf)'$.

Lad (f_n) være en følge i $C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

3) Vis, at hvis $f_n \to f$ uniformt, så gælder

$$Tf_n \to Tf \quad \text{uniformt og} \quad (Tf_n)' \to (Tf)' \quad \text{uniformt.}$$

Opgave 3

Lad $(a_n)_{n\geq 0}$ være en reel talfølge og antag, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ har konvergensradius $\rho > 0$ og sumfunktion

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{for} \quad t \in]-\rho,\rho[.$$

1) Vis, at hvis f er løsning til differentialligningen

$$(*) \qquad (1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R},$$

så gælder $a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} a_n$ for $n = 0,1,2,\ldots$.

(Opgaven fortsættes)

(opgave 3 fortsat)

2) Find for hvert af intervallerne $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ og $]1,\infty[$ mængden af maksimale reelle løsninger til (*) defineret på det pågældende interval.

3) Vis, at der gennem hvert punkt af mængden

$$T = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t = \pm 1 \ , \ y \in \mathbb{R}\}$$

går netop én maksimal løsning til (*) og find denne.

Opgave 4

Betragt mængden $[0,1]$ udstyret med den sædvanlige metrik.

1) Vis, at en funktion $g: [0,1] \to [0,1]$ af klasse C^1, som opfylder $|g'(s)| < 1$ for $s \in [0,1]$, er en kontraktion.

2) Vis, at afbildningen $f: [0,1] \to [0,1]$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \quad \text{for} \quad x \in [0,1]$$

ikke er en kontraktion, og at $f^2 = f \circ f$ er en kontraktion.

Lad nu (S,dist) være et fuldstændigt metrisk rum og lad $f: S \to S$ være en afbildning.

3) Vis, at hvis $f^2 = f \circ f$ er en kontraktion, så har f netop ét fikspunkt.