Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.
Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt løste. (Delvist løste opgaver medregnes).

Opgave 1.

Vis, at følgende grænseværdier eksisterer, og udregn disse værdier:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{e^x - 1} .$$

(b) $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\log x}{(1+x)^2} - \log \frac{x}{1+x} \right) .$$

(c) $$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3} \operatorname{Arctan} \frac{3}{\sqrt{x}} \right) .$$

Opgave 2.

Lad (M,dist) betegne et metrisk rum og antag, at for ethvert $a \in M$ og for ethvert $r > 0$ er mængden $B(a,r) = \{x \in M \mid \mathrm{dist}(a,x) \leq r\}$ kompakt og sammenhængende.

1) Vis, at enhver afsluttet og begrænset delmængde af M er kompakt.

2) Vis, at M er sammenhængende.

(Opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

3) Vis, at enhver fundamentalfølge i (M,dist) har et fortætningspunkt, og brug dette til at vise, at (M,dist) er et fuldstændigt metrisk rum.

Opgave 3.

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betegne den periodiske funktion med perioden 2π som på intervallet $[0,2\pi]$ er givet ved

$$f(x) = \cosh(x-\pi) \quad , \qquad 0 \leq x \leq 2\pi .$$

1) Vis, at f's Fourierrække er

$$k\left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2}\right) ,$$

hvor k er en konstant. Find denne.

2) Undersøg om f's Fourierrække konvergerer uniformt mod f.

3) Find summen af rækken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+4k^2} .$$

Opgave 4.

Med $A \subseteq \mathbb{R}$ betegnes et interval. Lad $f \in C^0(A,\mathbb{R})$, $a,b \in C^2(A,\mathbb{R})$ og sæt $c(t) = b'(t) - a''(t)$ for $t \in A$.

(Opgaven fortsættes)

(opgave 4 fortsat)

Betragt differentialligningen

$$\text{(i)} \quad a(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = f(t) \ , \qquad (t,x) \in A\times\mathbb{R}.$$

1) Vis, at man kan finde $g,h \in C^1(A,\mathbb{R})$ således at (i) kan omformes til differentialligningen

$$\text{(ii)} \quad \frac{d}{dt}\left[g(t)\frac{dx}{dt} + h(t)x\right] = f(t) \ , \qquad (t,x) \in A\times\mathbb{R},$$

og udtryk g og h ved a og b.

2) Find mængden af reelle løsninger til differentialligningen

$$\text{(iii)} \quad (t^2+2)\frac{d^2x}{dt^2} + 4t\frac{dx}{dt} + 2x = \frac{1}{t^2} \ , \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}.$$

3) Vis, at der findes netop én løsning $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ til (iii), som opfylder $x(t) \geq 0$ for $t > 0$ og $x(1) = 0$, og find denne.

Opgave 5.

Betragt delmængden S af $\mathbb{R}^2$ givet som mængden af punkter (x,y), der tilfredsstiller

(a) $(x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$,

(b) $y \geq 0$.

(Opgaven fortsættes)

(opgave 5 fortsat)

1) Vis, at enhver ret linie gennem $(0,0)$, med ligning $y = tx$, hvor $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, skærer S i netop et fra $(0,0)$ forskelligt punkt P_t, og find dette.

2) Vis, at afbildningen $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ defineret ved

$$P(t) = \begin{cases} P_t & \text{for} \quad t \neq 0, \\ (0,0) & \text{for} \quad t = 0, \end{cases}$$

er af klasse C^∞.

Lad C betegne den plane C^∞-kurve, parametriseret ved t i $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, der har $P(t)$ som hastighedsvektor, og som for $t = 0$ går gennem $(0,0)$.

3) Find buelængden $s = s(t)$ og tangentdrejningen $\theta = \theta(t)$ for C regnet ud fra $t = 1$.

4) Angiv en naturlig ligning for C.