Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1982.

MATEMATIK 102

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.
Sættet er på 3 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

Vi betragter kurveintegralet

$$I_\gamma = \int_\gamma \underline{k}(x,y)\cdot d\underline{r} = \int_\gamma \frac{-x^2y^3}{x^6+y^6}\,dx + \frac{x^3y^2}{x^6+y^6}\,dy$$

af vektorfeltet

$$\underline{k}(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^6+y^6}\,(-y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},$$

langs forskellige kurver γ.

1° Beregn I_γ, når γ er liniestykket fra $(1,0)$ til $(a,0)$ fulgt af liniestykket fra $(a,0)$ til (a,b), hvor $(a,b) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$.
Vink. Man kan have nytte af omskrivningen

$$x^6 + y^6 = x^6\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^6\right).$$

2° Undersøg, om I_γ har samme værdi for alle C^1-kurver γ, der forløber i $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ fra $(1,0)$ til (a,b).

3° Vis, at $I_\gamma > 0$, når γ er enhedscirklen gennemløbet i positiv omløbsretning. Er $\underline{k}$ et gradientfelt i $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$? Begrund svaret.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \sinh^3 t \, \frac{dx}{dt} - (2 \cosh t)x = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

1° Løs den normerede ligning i hvert af dens definitionsintervaller.

2° Gør rede for, at alle maximale løsninger til (*) er defineret på $\mathbb{R}$. Vis at mængden af maximale løsninger til (*) udgør et vektorrum af dimension 2.

3° Find alle maximale løsninger til

$$\sinh^3 t \, \frac{dx}{dt} - (2 \cosh t)x = -2 \cosh t$$

gennem punktet $(0,1)$.

Opgave 3

Lad X betegne mængden af C^1-kurver i planen, som har en naturlig parameterfremstilling, og som har begyndelsespunkt $0 \in \mathbb{C}$ og kurvelængde 1. I X defineres d ved

$$d(K_1,K_2) = \sup_{0 \leq s \leq 1} |z_1'(s) - z_2'(s)|,$$

hvor kurverne $K_1, K_2 \in X$ har de entydigt bestemte naturlige parameterfremstillinger

$$K_1 : s \mapsto z_1(s), \quad s \in [0,1], \quad z_1(0) = 0,$$
$$K_2 : s \mapsto z_2(s), \quad s \in [0,1], \quad z_2(0) = 0.$$

(Opgaven fortsættes)

(Opgave 3 fortsat)

1° Vis, at $d : X \times X \to \mathbb{R}$ er en metrik.

2° Vis, at diam $X = 2$.

3° Betragt den afbildning f, som til en kurve $K \in X$, $K : s \mapsto z(s)$, $s \in [0,1]$, $z(0) = 0$, lader svare dens endepunkt $z(1)$.

Vis, at f er en uniformt kontinuert afbildning af (X,d) ind i $\mathbb{C}$ udstyret med den sædvanlige metrik.

Opgave 4

Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med konvergenstal $\rho > 0$ og sumfunktion

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{for} \qquad x \in \,]-\rho,\rho[\,.$$

1° Vis, at der ved

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x \sin t) \cos t \, dt \qquad \text{for} \qquad x \in \,]-\rho,\rho[$$

defineres en C^1-funktion.

2° Vis, at for hvert fast $x \in \,]-\rho,\rho[$ er rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x \sin t)^n$$

uniformt konvergent på intervallet $[0,\frac{\pi}{4}]$.

3° Find en potensrækkefremstilling af f og bestem dens konvergenstal.