Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.
Sættet er på 3 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

I den komplekse plan $\mathbb{C}$, med den sædvanlige metrik $\mathrm{dist}(x,y) = |x-y|$, betegnes med $B(x,r)$ den afsluttede cirkelskive med centrum $x \in \mathbb{C}$ og radius $r \geq 0$, altså

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{C} \mid |x-y| \leq r\}.$$

Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en punktfølge i $\mathbb{C}$ og $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en talfølge med $r_n \geq 0$. Antag, at

$$B(x_{n+1},r_{n+1}) \subseteq B(x_n,r_n) \text{ for } n = 1,2\cdots.$$

1) Vis, at $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ eksisterer.

2) Vis, at $|x_{n+1} - x_n| \leq r_n - r_{n+1}$, $n = 1,2\cdots$, og at $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ eksisterer.

3) Vis, at $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n,r_n) = B(x,r)$.

Opgave 2

En funktion $f :]0,\infty[\to]0,\infty[$ kaldes voksende såfremt

$$\forall x,y > 0 : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

1) Vis, at hvis $f_n :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $n \in \mathbb{N}$, er en følge af voksende funktioner, som konvergerer punktvis mod f, så er f voksende.

2) Antag at f er konveks. Vis, at for ethvert fast $a > 0$ er $\dfrac{f(x+a) - f(x)}{a}$ en voksende funktion af x.

For ethvert fast $a > 0$ defineres en funktion $f_a :]0,\infty[\to]0,\infty[$ ved

$$f_a(x) = \frac{f(x+a)}{f(x)} \quad \text{for} \quad x > 0 .$$

3) Vis, at hvis f er logaritmisk konveks, så er f_a voksende for alle $a > 0$.

4) Vis, at hvis f er differentiabel og f_a er voksende for alle $a > 0$, så er f logaritmisk konveks.

Opgave 3

Lad $(a_n)_{n\geq 0}$ være en reel talfølge og antag, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ har konvergensradius $\rho > 0$ og sumfunktion

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{for} \quad t \in]-\rho,\rho[.$$

1) Vis, at hvis f er en løsning til differentialligningen

$$(*) \qquad tx''(t) - x'(t) - t^3 x(t) = 0 ,$$

så gælder

$$(**) \qquad \begin{cases} a_1 = a_3 = 0 \\ a_{n+4} = a_n \dfrac{1}{(n+4)(n+2)} \quad \text{for} \quad n = 0,1,2\cdots . \end{cases}$$

2) Find konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, hvor $(a_n)_{n\geq 0}$ er en vilkårlig reel talfølge, der opfylder (**).

3) Find den fuldstændige løsning til (*) (reduceret mest muligt).

Opgave 4

For en C^1-kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ defineres

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{|\gamma(t)|} |\gamma'(t)| dt .$$

Lad $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ og $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ være komplekse tal med $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ og $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Med Γ betegnes mængden af C^2-kurver $\gamma: [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, der har en parameterfremstilling af formen $\gamma(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$ med $r : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{R}_+$ og $\gamma(\theta_i) = z_i$, $i = 1,2$.

1) Gør rede for, at

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}}{r(\theta)} \, d\theta \quad \text{for} \quad \gamma \in \Gamma.$$

2) Find den fuldstændige løsning til Euler's differentialligning hørende til dette integral.

3) Gør rede for, at der findes netop én løsning $r : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{R}_+$, for hvilken den tilsvarende kurve γ tilhører Γ og beskriv denne kurve γ.