Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1974

Matematik 102

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1

Lad (X, dist_X) og (Y, dist_Y) være metriske rum.

1° Antag, at $(x_n \in X \mid n \in \mathbb{N})$ er en konvergent følge med grænsepunkt $x \in X$.

Vis, at $K = \{x_n \in X \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ er en kompakt delmængde af X.

2° Vis, at en afbildning $f: X \to Y$ er kontinuert hvis og kun hvis det for enhver kompakt delmængde K af X gælder, at restriktionen $f|K: K \to Y$ af f til K er kontinuert.

3° Vis, at en delmængde F af X er afsluttet hvis og kun hvis $F \cap K$ er afsluttet relativt til K for enhver kompakt delmængde K af X.

Opgave nr. 2

Betragt en plan kurve af klasse C^2, der forbinder punkterne P og Q. Det antages, at kurven kan beskrives ved en parameterfremstilling, hvor den afledede er $\neq 0$ i hele definitionsintervallet. Idet man regner buelængden

(opgaven fortsættes)

s ud fra kurvepunktet P, oplyses det, at krumningen for kurven som funktion af s er givet ved ligningen $\kappa(s) = \frac{2}{1+s^2}$. Antag yderligere, at tangenten i Q er vinkelret på tangenten i P.

1° Vis, at kurven har længden 1.

2° Bestem afstanden fra Q til skæringspunktet mellem tangenterne i P og Q. (Vink: Man kan f.eks. benytte en naturlig parameterfremstilling for kurven.)

Opgave nr. 3

1° Vis, at det uegentlige integral

$$\int_2^\infty x^a (\log x)^b dx$$

eksisterer hvis og kun hvis en af følgende betingelser er opfyldt af de reelle konstanter a og b:

i) $a < -1$ og b vilkårlig

ii) $a = -1$ og $b < -1$.

2° Undersøg om følgende uendelige række er konvergent eller divergent

$$\sum_{n=2}^{\infty} [n^{(n-1)/n} (\log n)^2]^{-1} .$$

Opgave nr. 4

Betragt følgende differentialligningssystem

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

(opgaven fortsættes)

for $(t,(x_1,x_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

1° Lad $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ og lad $(\varphi_1(t),\varphi_2(t)): I \to \mathbb{R}^2$ være en vilkårlig løsning til differentialligningssystemet, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval, $t_0 \in I$ og $(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0)) = (a_1,a_2)$.

Vis, at linien gennem $(0,0)$ og (a_1,a_2) danner vinklen $\frac{\pi}{4}$ med tangenten for kurven $(\varphi_1(t),\varphi_2(t)): I \to \mathbb{R}^2$ i (a_1,a_2).

2° Lad nu $(\varphi_1(t),\varphi_2(t)): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ betegne den maksimale løsning til differentialligningssystemet med begyndelsesbetingelsen $(\varphi_1(0),\varphi_2(0)) = (1,0)$.

Find den euklidiske afstand fra $(0,0)$ til $(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ for ethvert $t \in \mathbb{R}$.

Opgave nr. 5

1° Betragt potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, hvor

$$a_{2k} = 0 \quad , \quad a_{2k+1} = (-1)^k \frac{2^k . k!}{(2k+1)!}$$

$$b_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^k . k!} \quad , \quad b_{2k+1} = 0$$

for alle $k = 0,1,2,\cdots$.

Vis, at begge potensrækker er konvergente for ethvert $t \in \mathbb{R}$.

2° Vis, at sumfunktionerne for de 2 potensrækker i 1° er løsninger defineret på hele $\mathbb{R}$ til differentiallig-

(opgaven fortsættes)

ningen

$$(*) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + t \cdot \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

3° Vis, at enhver maksimal løsning til (*) har definitionsinterval $\mathbb{R}$ og er sumfunktion for en potensrække.

Bemærk: spørgeskema på næste side.