Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1982/83.

G14

MATEMATIK 102

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes, også lommeregnere.
Sættet er på 3 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1

1° Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være periodisk med periode 2π og i intervallet $[0,2\pi[$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-\pi) & \text{for} \quad 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{for} \quad x = 0. \end{cases}$$

Vis, at f har Fourierrækken

$$\frac{i}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} .$$

Gør rede for, at Fourierrækken er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$ med sum $f(x)$, men at konvergensen ikke er uniform på $\mathbb{R}$.

2° Find Fourierrækken for funktionen $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som er periodisk med periode 2π og i intervallet $[0,2\pi[$ givet ved

$$F(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2\pi x).$$

3° Gør rede for, at Fourierrækken for F er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$ med sum $F(x)$. Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2

Lad (M,d) være et metrisk rum. For en funktion $f: M \to \mathbb{R}$ kan vi betragte betingelsen

$$(*)\begin{cases} \forall x \in M \ \forall \text{ følger } (x_n) \text{ i } M: \\ x_n \to x \Rightarrow \limsup f(x_n) \leqq f(x). \end{cases}$$

1° Vis, at hvis f opfylder $(*)$, så er mængden $T_a = \{t \in M \mid f(t) \geqq a\}$ afsluttet for ethvert $a \in \mathbb{R}$.

2° Vis, at hvis f ikke opfylder $(*)$, så findes et $a \in \mathbb{R}$, for hvilket T_a ikke er afsluttet.

3° Lad f opfylde $(*)$, og lad K være en ikke tom, kompakt delmængde af M. Vis, at der findes et $x \in K$, for hvilket

$$f(x) = \sup\{f(t) \mid t \in K\}.$$

Opgave 3

Lad $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\log(1-x)}{x} & \text{for } x \in]-1,0[\cup]0,1[, \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

1° Vis, at f er kontinuert.

Lad $F:]-1,1[\to \mathbb{R}$ være givet ved

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt .$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 3 fortsat)

2° Vis, at

$$F(x) + F(1-x) = K - \log x \cdot \log(1-x) \quad \text{for} \quad x \in]0,1[,$$

hvor K er en konstant. Vis endvidere, at

$$F(x) \to K \quad \text{for} \quad x \to 1_- \ .$$

Vink. Undersøg $\log x \cdot \log(1-x)$ for $x \to 0_+$.

3° Vis, at

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \text{for} \quad x \in]-1,1[,$$

og begrund herved, at

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ .$$

Opgave 4

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad t\frac{d^2x}{dt^2} + 2(t+1)\frac{dx}{dt} + (t+2)x = \frac{e^{-t}\log t}{t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \ .$$

1° Vis, at den tilsvarende homogene ligning har en løsning af formen e^{kt}.

2° Find samtlige maksimale løsninger til (*).

3° Vis, at der for enhver løsning $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, til (*) gælder, at

$$x(t) \to 0 \quad \text{for} \quad t \to \infty,$$

og at $tx(t)$ har en endelig grænseværdi for $t \to 0_+$, samt at

$$|x(t)| \to \infty \quad \text{for} \quad t \to 0_+ \ .$$