KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1975-76.

MATEMATIK 102.

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Bemærk, at sættet denne gang indeholder 4 opgaver.

Opgave nr. 1.

Lad (X,dist) være et metrisk rum og lad $f: X \to X$ være en kontinuert afbildning. Som sædvanlig definerer vi for ethvert $n \in \mathbb{N}$ afbildningen $f^n: X \to X$ induktivt ved fastsættelserne $f^1 = f$ og $f^n = f \circ f^{n-1}$ for $n \geq 2$.

Bevis, at såfremt (X,dist) er kompakt, f er surjektiv og følgen af afbildninger $f^1, f^2, \ldots, f^n, \ldots$ er uniformt konvergent, da må f være den identiske afbildning 1_X af X på sig selv.

<u>Vink</u>: Lad (X,dist) være et kompakt metrisk rum og lad $f: X \to X$ være en kontinuert og surjektiv afbildning. Antag, at følgen af afbildninger $f^1, f^2, \ldots, f^n, \ldots$ konvergerer uniformt mod afbildningen $g: X \to X$. Opgaven kan så løses i følgende skridt:

a) Vis, at $g = f \circ g$.

b) Vis, at g afbilder X på en kompakt delmængde af X.

c) Vis dernæst, f.eks. ved et indirekte bevis under benyttelse af b), at g er surjektiv.

d) Vis sluttelig under benyttelse af a) og c), at $f = 1_X$.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1975-76.

Matematik 102.

Opgave nr. 2.

Lad $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være kontinuerte reelle funktioner defineret på $\mathbb{R}^2$ og antag, at disse funktioner har kontinuerte partielle afledede i alle punkter af $\mathbb{R}^2$.

Antag endvidere, at der findes en reel konstant K, således at

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, x_2) \right| \leq K$$

for alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ og for alle $i,j = 1,2$.

Betragt så følgende differentialligningssystem på $\mathbb{R}^2$,

$$(*) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \ . \end{aligned}$$

1°. Vis, at eksistens- og entydighedssætningen kan anvendes på differentialligningssystemet (*) og at enhver maksimal løsning er defineret på hele $\mathbb{R}$.

2°. For $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ skal $t \mapsto \underline{\varphi}_{(x_1, x_2)}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i det følgende betegne den entydigt bestemte maksimale løsning til (*) for hvilken $\underline{\varphi}_{(x_1, x_2)}(0) = (x_1, x_2)$.

Lad $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ og $t \in \mathbb{R}$ være givet. Vis så, at afbildningen $s \mapsto \underline{\psi}(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ defineret ved $\underline{\psi}(s) = \underline{\varphi}_{(x_1, x_2)}(t+s)$ er

(opgaven fortsættes)

den løsning til (*), der tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen $\underline{\psi}(0) = \underline{\varphi}_{(x_1,x_2)}(t)$.

3°. Definer nu for ethvert $t \in \mathbb{R}$ afbildningen $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved fastsættelsen $F_t(x_1,x_2) = \varphi_{(x_1,x_2)}(t)$.

Vis, at $F_s \circ F_t = F_{s+t}$ for alle $s,t \in \mathbb{R}$. Vis endvidere, at $F_0 = 1_{\mathbb{R}^2}$, hvor $1_{\mathbb{R}^2}$ betegner den identiske afbildning af $\mathbb{R}^2$ på sig selv.

4°. Betragt nu specielt differentialligningssystemet bestemt ved funktionerne $f_1(x_1,x_2) = -x_2$ og $f_2(x_1,x_2) = x_1$. Gør rede for, at afbildningen $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er defineret for ethvert $t \in \mathbb{R}$ og bestem den.

Opgave nr. 3.

På et interval $I \subset \mathbb{R}$ er defineret en følge (f_n) af komplekse funktioner og en følge (g_n) af reelle funktioner. Om (g_n) antages yderligere at $0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ for alle $x \in I$ og alle $n \in \mathbb{N}$ og at (g_n) konvergerer uniformt mod nul.

Definer for ethvert $n \in \mathbb{N}$ og for ethvert $x \in I$

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

og

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(x)$$

1°. Gør rede for at for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x)F_n(x),$$

(opgaven fortsættes)

og slut heraf, at for $n > m$ gælder

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x)F_n(x) - g_{m+1}(x)F_m(x).$$

2°. Antag nu, at $|F_n(x)| \leq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og for alle $x \in I$. Gør rede for at

$$| s_n(x) - s_m(x) | \leq 2Mg_{m+1}(x)$$

for $n > m$ og for ethvert $x \in I$.

Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ er uniformt konvergent på I.

3°. Lad $\delta \in]0,\pi[$. Gør rede for at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

er uniformt konvergent på $[\delta, 2\pi-\delta]$.

Opgave nr. 4.

Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et åbent interval, lad $f: I \to \mathbb{R}$ være en C^∞-funktion og lad $x_0 \in I$.

Antag at der eksisterer et $\rho > 0$ således at intervallet $I_\rho = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < \rho\} \subset I$ og således at

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

for alle x i I_ρ.

(opgaven fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1975-76.

Matematik 102.

Det forudsættes kendt, at der heraf følger, at for ethvert $n = 0,1,2,\ldots$ gælder

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

for alle $x \in I_\rho$.

1°. Med ovenstående antagelser lad $0 < t < \rho$. Vis at der findes et $n_0 \in \mathbb{N}$ således at

$$|f^{(n)}(x_0)| \leq \frac{n!}{t^n}$$

for ethvert $n \geq n_0$.

2°. Med t og n_0 som i 1° lad $r \in]0,t[$. Gør rede for at

$$\left(1 - \frac{r}{t}\right)^{-(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\ k!} \left(\frac{r}{t}\right)^k$$

og vis dernæst, at

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{t\, n!}{(t-r)^{n+1}}$$

for $n \geq n_0$ og for alle x for hvilke $|x-x_0| \leq r$.

3°. Benyt 2° til at vise følgende sætning:

Lad $x_0 \in I$ og antag at Taylorrækken for f udviklet i x_0 konvergerer mod f i et åbent interval indeholdende x_0. Da eksisterer der reelle tal $A > 0$, $B > 0$ og $r > 0$, således at

$$|f^{(n)}(x)| \leq A\, B^n n!$$

for $n = 0,1,2,\ldots$ og for alle x for hvilke $|x-x_0| < r$.

4°. Formuler og bevis den omvendte sætning til den i 3° viste.

VEND!