Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1981

eo 56

MATEMATIK 101
Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes (også lommeregnere).
Alle 8 opgaver ønskes besvaret.

Opgave nr. 1

En afbildning $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ er bestemt ved

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1+x_2+x_3,\ 2+x_3+x_4,\ 3+x_4+x_5,\ 4+x_5+x_1,\ 5+x_1+x_2).$$

Undersøg, om f er bijektiv.

Opgave nr. 2

Vis, at matricerne $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ er regulær-ækvivalente, men ikke unitær-ækvivalente.

Opgave nr. 3

Lad $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ være komplekse $n \times n$-matricer, så at $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$. Antag, at alle egenværdier for $\underline{\underline{A}}$ har egenværdimultiplicitet 1, og vis, at enhver egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ også er egenvektor for $\underline{\underline{B}}$. Antag yderligere, at $\underline{\underline{A}}$ er normal, og vis, at så er også $\underline{\underline{B}}$ normal.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1981
Matematik 101

Opgave nr. 4

Lad V være vektorrummet af reelle affine funktioner f på intervallet $[-1,1]$ udstyret med supremumsnormen

$$\|f\| = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|.$$

Vis, at funktionerne f_1 og f_2 definerede ved

$$f_1(t) = t + 1, \qquad f_2(t) = t - 1$$

er en basis for V. Beskriv (gerne ved en tegning) billedet af enhedskuglen i V under koordinatafbildningen af V på $\mathbb{R}^2$ bestemt ved denne basis.

Opgave nr. 5

Om en endomorfi f af et tredimensionalt vektorrum V vides, at der findes fire vektorer $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ og $\underline{d}$, som frembringer V, og for hvilke der gælder

$$f(\underline{a}) = \underline{b}, \quad f(\underline{b}) = \underline{a}, \quad f(\underline{c}) = \underline{d} \quad \text{og} \quad f(\underline{d}) = \underline{c}\ .$$

Vis, at f^2 er den identiske afbildning på V.
Vis, at f er diagonaliserbar, og bestem mængden af egenværdier for f.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1981

Matematik 101

Opgave nr. 6

Om en $\mathcal{C}^2$-funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vides, at $f\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ for alle $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, og at $D_1{}^2 f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 1$. Bestem (evt. ved brug af kædereglen) de afledede $D_1 f$, $D_2 f$, $D_1 D_2 f$ og $D_2{}^2 f$ i punktet $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Undersøg, om f har lokalt minimum i $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Opgave nr. 7

I vektorrummet $(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ med det sædvanlige indre produkt betegnes med U kernen for linearformen

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (1+i)x_1 + x_2 + x_3 .$$

Angiv de par $(\lambda, \underline{v})$, bestående af et tal $\lambda \in \mathbb{C}$ og en vektor $\underline{v} \in \mathbb{C}^3$, for hvilke der findes netop én endomorfi $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, som opfylder:

(*) $\quad f(\underline{u}) = \underline{u}$ for alle $\underline{u} \in U$, og $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$.

For hvilke af disse par $(\lambda, \underline{v})$ gælder, at den ved (*) bestemte endomorfi f er normal, henholdsvis selvadjungeret, henholdsvis unitær?

Bestem når $\lambda = i$ og $\underline{v} = (1-i, 1, 1)$ matrixligningen (m.h.t. den sædvanlige basis for $\mathbb{C}^3$) for den ved (*) bestemte endomorfi f.

Opgave nr. 8

Om kvadrikken K i $\mathbb{R}^3$ vides at den er en omdrejningsparaboloide. Det vides at punktet $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ligger på kvadrikkens omdrejningsakse, at punktet $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ligger på K, samt at punktet $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ligger både på K og på omdrejningsaksen. Find en ligning for K (med hensyn til den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$).