Københavns Universitet

eo 52

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1980/81

MATEMATIK 101

Alle hjælpemidler kan medbringes (også lommeregnere).

Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 6 af følgende 7 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave 1

Lad endomorfien f af det 3-dimensionale komplekse talrum $\mathbb{C}^3$ være givet ved

$$f(\underline{e}_1) = (1,-1,1),$$
$$f(\underline{e}_2) = (1,-1,1+i) \quad \text{og}$$
$$f(\underline{e}_1+\underline{e}_2+\underline{e}_3) = (2,-2,2+2i),$$

idet $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ er den naturlige basis for $\mathbb{C}^3$.

Bestem en basis for kernen K_f og en basis for billedrummet $f(\mathbb{C}^3)$.

Bestem en basis for $\mathbb{C}^3$ således, at matricen for f med hensyn til denne basis er en Jordan-matrix.

Opgave 2

Lad f være en endomorfi af det 3-dimensionale reelle talrum $\mathbb{R}^3$, og lad U betegne underrummet af $\mathbb{R}^3$ udspændt af vektorerne $(1,1,0)$ og $(1,-1,0)$. Om f og U oplyses, at U er invariant ved f, at restriktionen $g: U \to U$ af f til U er nilpotent, samt at

$$f(1,-1,0) = (1,1,0) \quad \text{og}$$
$$f(1,1,1) = (2,2,2).$$

(Opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

Bevis, at f herved er entydigt fastlagt, ved at bestemme en matrix for f.

Bestem endvidere matricen for f med hensyn til den naturlige basis for $\mathbb{R}^3$.

Opgave 3

Bevis, at for enhver $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder, at graden af polynomiet

$$f(t) = \det(\underline{\underline{A}} + t\underline{\underline{E}}_{n,n}^{(r)})$$

er højst r. Her betegner n og r naturlige tal, så $1 \leq r \leq n$, og $\underline{\underline{E}}_{n,n}^{(r)}$ betegner diagonal $n \times n$-matricen med 1 på de første r pladser i diagonalen og 0 på de sidste $n-r$ pladser i diagonalen.

Bevis, at for $n \times n$-matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ gælder, at graden af polynomiet

$$g(t) = \det(\underline{\underline{A}} + t\underline{\underline{B}})$$

er n, hvis $\mathrm{rg}\underline{\underline{B}} = n$, og ellers højst er $\mathrm{rg}\underline{\underline{B}}$.

Opgave 4

I et 4-dimensionalt vektorrum V med indre produkt og med ortonormal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$ er givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \,, \qquad \underline{a}_2 = \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \,,$$
$$\underline{a}_3 = \underline{e}_3 + \underline{e}_4 \quad \text{og} \quad \underline{a}_4 = \underline{e}_4 + \underline{e}_1 \,.$$

(Opgaven fortsættes)

(Opgave 4 fortsat)

Bevis, at $\text{rg}\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3,\underline{a}_4\} = 3$.

Bestem en ortonormal basis for underrummet U udspændt af $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3$ og $\underline{a}_4$, og bestem en ortonormal basis for det ortogonale komplement $U^\perp$.

Bestem matricen, der i basen $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3,\underline{e}_4)$ repræsenterer den ortogonale projektion af V på U.

Opgave 5

Bestem for ethvert $a \in \mathbb{R}$ arten af den kvadrik $K(a)$ i $\mathbb{R}^3$, der er givet ved ligningen

$$x^2 + ay^2 + z^2 + 2(1-a^2)x - 2az = 0.$$

Bestem ligeledes for ethvert $a \in \mathbb{R}$ mængden af centrer for $K(a)$.

Bestem endelig for ethvert $a \in \{-1,0,1\}$ mængden af linier i $\mathbb{R}^3$ gennem $(0,0,0)$, som er indeholdt i $K(a)$, og angiv parameterfremstillinger for samtlige sådanne linier.

Opgave 6

Gør rede for, at for ethvert $a \in \mathbb{R}$ fastlægger kvadrikligningen fra opgave nr. 5 i en omegn af $(0,0,0)$ enten z som en C^∞-funktion $z = g(x,y)$ eller x som en C^∞-funktion $x = h(y,z)$.

Bestem for ethvert $a \in \mathbb{R}$ en ligning for tangentplanen til kvadrikken i $(0,0,0)$.

Bestem mængden af $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ for hvilke g har lokalt ekstremum i $(0,0)$.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 7

Lad $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være symmetriske reelle $n \times n$-matricer, og antag, at $\underline{\underline{B}}$ er regulær. Lad funktionerne $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være de kvadratiske former defineret ved

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \ldots x_n)\underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad g(x_1, \ldots, x_n) = (x \ldots x_n)\underline{\underline{B}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Bevis, at hvis f har lokalt ekstremum i punktet $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ under bibetingelsen $g(x_1, \ldots, x_n) = 1$, da er $(a_1, \ldots, a_n)$ egenvektor for (endomorfien med) matricen $\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}$.

Bestem ved hjælp heraf minimum for $2x^2+3y^2$ under bibetingelsen $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$.