Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1980.

MATEMATIK 101

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes (også lommeregnere).

Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 6 af følgende 7 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave nr. 1

I det 4-dimensionale komplekse talrum $\mathbb{C}^4$ ønskes bestemt fællesmængden af underrrummene U og K_f, hvor U udspændes af vektorerne

$$(1,i,0,2-i) \qquad \text{og} \qquad (0,1-2i,-1,3i),$$

mens K_f betegner kernen for den linearform f på $\mathbb{C}^4$, som er givet ved

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3-2i)x_1 + (1-i)x_2 + ix_3 + x_4$$

for alle $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4$.

Opgave nr. 2

Lad $(V,\mathbb{R})$ være mængden af reelle polynomier af højst anden grad organiseret som et vektorrum på den naturlige måde. Det vides, at polynomierne 1, x og x^2 udgør en basis for V, samt at polynomierne 1, $x-1$ og $(x-1)^2$ ligeledes udgør en basis for V.

(Opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

Find koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ for overgang fra basen $(1,x,x^2)$ til basen $(1,x-1,(x-1)^2)$ samt koordinattransformationsmatricen for overgang fra basen $(1,x-1,(x-1)^2)$ til basen $(1,x,x^2)$.

Lad $f: V \to V$ være afbildningen, der til et polynomium p i V knytter det polynomium af højst første grad, der har kontakt med p i 1.

Bevis, at f er en endomorfi.

Bestem matricen $\underline{\underline{A}}$ hørende til f med hensyn til basen $(1,x,x^2)$ og matricen $\hat{\underline{\underline{A}}}$ hørende til f med hensyn til basen $(1,x-1,(x-1)^2)$.

Opgave nr. 3

Bestem mængden T, henholdsvis mængden D, af reelle tal a for hvilke den reelle matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4a & 0 \\ 1-a & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

er triagonaliserbar, henholdsvis diagonaliserbar.

Bestem endvidere for ethvert $a \in T$ en Jordan-normalform for denne matrix.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1980

Matematik 101

Opgave nr. 4

For en $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ betegner $U(\underline{\underline{A}})$ underrummet af $M_{n,n}(\mathbb{C})$ frembragt af mængden

$$\{\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{A}}^2, \ldots, \underline{\underline{A}}^{n-1}\}.$$

Bevis, at $\underline{\underline{A}}^n$ tilhører $U(\underline{\underline{A}})$.

Bevis, at $\underline{\underline{A}}^i$ tilhører $U(\underline{\underline{A}})$ for alle $i \in \mathbb{N}$.

Bevis, at $\underline{\underline{A}}^{-1}$ tilhører $U(\underline{\underline{A}})$, hvis $\underline{\underline{A}}$ er regulær.

Opgave nr. 5

Om den selvadjungerede endomorfi f af talrummet $\mathbb{R}^3$ oplyses, at rangen af f er 1, samt at

$$f(2,-2,-1) = 9(2,-2,-1).$$

Bestem en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ således at matricen for f er en diagonalmatrix, og angiv denne diagonalmatrix.

Bestem endelig matricen for f med hensyn til den naturlige basis for $\mathbb{R}^3$.

Opgave nr. 6

Funktionen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er defineret ved, at $g(x_1,x_2)$ er den største reelle løsning y til trediegradsligningen

$$y^3 + x_1y^2 - x_2 = 0.$$

Begrund, at g er en C^∞-funktion på mængden

$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \wedge x_2 > 0\}.$$

Bestem det polynomium af anden grad, der har kontakt af anden orden med g i punktet $(3,4)$, hvor g har værdien 1.

(Opgavesættet fortsætte

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1980
Matematik 101

Opgave nr. 7

I talrummet $\mathbb{R}^3$ er der givet en kvadrik ved ligningen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1 + 6x_3 + 8 = 0 .$$

Bestem arten af denne kvadrik.

Begrund, at der på kvadrikken findes et punkt, der ligger nærmest planen med ligning $x_3 = 0$.

Bevis, at der findes højst ét sådant punkt på kvadrikken, og bestem dette.