KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1979/80

MATEMATIK 101

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes (også lommeregnere).
Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 6 af følgende 7 opgaver er korrekt besvaret.

## Opgave nr. 1

Endomorfien $f$ af talrummet $\mathbb{C}^3$ er givet ved, at dens matrix med hensyn til den naturlige basis for $\mathbb{C}^3$ er

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 & i \\ 2 & 1-i & 1+i \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der er endvidere givet vektorerne

$\underline{a} = (1,0,0)$, $\underline{b} = (2+i3,\ 5+i,\ i)$, $\underline{c} = (1+i,2,0)$.

Bestem følgende fem delmængder af $\mathbb{C}^3$:

$f^{-1}(\{\underline{a}\})$, $f^{-1}(\{\underline{b}\})$, $f^{-1}(\{\underline{c}\})$,

$f^{-1}(\operatorname{span}\{\underline{a},\underline{b}\})$ og $f^{-1}(\operatorname{span}\{\underline{b},\underline{c}\})$.

## Opgave nr. 2

Lad afbildningen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2,\ 2x_1,\ 3x_1) \quad \text{for} \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 ,$$

og lad der være givet matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(Opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

Find en basis for $\mathbb{R}^2$ og en basis for $\mathbb{R}^3$ således, at matricen for f med hensyn til disse baser er $\underline{\underline{A}}$.

Begrund, at der for intet valg af baser for $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ gælder, at $\underline{\underline{B}}$ er matrix for f.

## Opgave nr. 3

For $a \in \mathbb{R}$ er den reelle matrix $\underline{\underline{M}}_a$ givet ved

$$\underline{\underline{M}}_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1-3a \\ 1+a & 1+a \end{pmatrix}.$$

Bestem følgende delmængder af $\mathbb{R}$:

$T = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{\underline{M}}_a$ er triagonaliserbar (som reel matrix)$\}$,

$D = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{\underline{M}}_a$ er diagonaliserbar (som reel matrix)$\}$,

$N = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{\underline{M}}_a$ er normal$\}$,

$S = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{\underline{M}}_a$ er symmetrisk$\}$,

$O = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{\underline{M}}_a$ er ortogonal$\}$.

Bestem endvidere en unitær $2\times2$-matrix $\underline{\underline{S}}$, så $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{M}}_1\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en (kompleks) diagonalmatrix.

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1979/80
Matematik 101

## Opgave nr. 4

Lad $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$ være lineært uafhængige vektorer i et reelt vektorrum $V$ med indre produkt. Opstil et lineært ligningssystem til bestemmelse af $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$, således at $x_1\underline{a}_1+\dots+x_n\underline{a}_n$ er den ortogonale projektion af en given vektor $\underline{b} \in V$ på $\operatorname{span}\{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n\}$.

Lad dernæst $\underline{\underline{A}}$ være en $m\times n$-matrix med reelle elementer $a_{ij}$ og rang $n$, og lad $\underline{\underline{b}}_|$ være en $m\times 1$-søjlematrix med elementer $b_i$. Vis (f.eks. ved at benytte opgavens første del), at andengradspolynomiet

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{m} (a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n - b_i)^2 ,$$

defineret på $\mathbb{R}^n$, antager sin mindste værdi for netop ét sæt $(x_1,\dots,x_n)$, og at dette sæt (som søjlematrix $\underline{\underline{x}}_|$) er løsningen til $\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{A}}'\underline{\underline{b}}_|$.

## Opgave nr. 5

Undersøg, om matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

er positiv definit. Bestem dernæst for ethvert $a \in \mathbb{R}$ arten af kvadrikken i $\mathbb{R}^3$ med ligningen

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4yz - 2zx + 2xy = a.$$

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1979/80
Matematik 101

## Opgave nr. 6

Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x_1,x_2) = x_1{}^2 + 2x_1x_2 + 4x_2{}^2 .$$

Bestem størsteværdien og mindsteværdien for $f$ på ellipseskiven $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1{}^2 + 4x_2{}^2 \leqq 8\}$.

## Opgave nr. 7

Lad afbildningen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være defineret ved

$$f(x_1,x_2) = (x_2 + \exp x_1, -x_1 + \exp x_2) \quad \text{for} \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Det oplyses, at $f$ er bijektiv. (Dette ønskes ikke bevist).

Begrund, at den inverse afbildning $g = f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en $C^\infty$-afbildning, og bestem dennes funktionalmatrix $Dg$ i punktet $(1,1)$.

Idet $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, ønskes de partielle afledede af anden orden $D_1{}^2g_1$ og $D_1{}^2g_2$ bestemt i punktet $(1,1)$.