KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1979

MATEMATIK 101

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes (også lommeregnere).

Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 6 af følgende 7 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave nr. 1.

I det komplekse 3-dimensionale talrum $\mathbb{C}^3$ er givet vektorerne

$$\underline{a} = (1,\ i,\ -1+i), \qquad \underline{a}' = (0,\ 1,\ -1+i),$$

$$\underline{b} = (0,\ 1-i,\ 3i), \qquad \underline{b}' = (1+i,\ -1-i,\ 3i),$$

$$\underline{c} = (-i,\ 1+i,\ 0).$$

Gør rede for, at der eksisterer netop én endomorfi f af $\mathbb{C}^3$ således, at

$$f(\underline{a}) = \underline{a}', \quad f(\underline{b}) = \underline{b}', \quad f(\underline{c}) = \underline{0}.$$

Vis endvidere, at $f \circ f = f$, og bestem en basis for billedrummet $f(\mathbb{C}^3)$ og en basis for kernen K_f.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 2.

Endomorfien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved, at dens matrix med hensyn til basen $(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = ((2,1), (1,1))$ for $\mathbb{R}^2$ er

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Find matricen for f m.h.t. den naturlige basis for $\mathbb{R}^2$, og angiv matricen for den duale endomorfi $f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ligeledes m.h.t. den naturlige basis.

Find endelig matricen for f' m.h.t. basen $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

(Talrummet $\mathbb{R}^2$ er som sædvanlig i dualitet med sig selv ved $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$.)

Opgave nr. 3.

Lad endomorfierne f og g af talrummet $\mathbb{R}^3$ have matricerne henholdsvis

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

med hensyn til den naturlige basis for $\mathbb{R}^3$.

Find en basis for $\mathbb{R}^3$, med hensyn til hvilken matricerne for f og g begge er diagonalmatricer.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 4.

Lad f være en endomorfi af et endeligdimensionalt komplekst vektorrum V med indre produkt. Vis, at f er normal, hvis og kun hvis der findes en selvadjungeret endomorfi s af V og en unitær endomorfi u af V således, at

$$f = s \circ u = u \circ s .$$

(Vink til "kun hvis": Betragt en ortonormalbasis, der diagonaliserer f, og søg at bestemme s og u således, at også de diagonaliseres af samme basis.)

Opgave nr. 5.

Vis, at ligningen

$$(x + y - 2z)^2 - 2(x + y + z)^2 - 3(x - y)^2 = 6$$

fremstiller en omdrejningshyperboloide, som er hyperbolsk (d.v.s. med to net), og find en parameterfremstilling for dens omdrejningsakse.

Opgave nr. 6.

Lad $\underline{\underline{B}}$ være en symmetrisk reel $k \times k$-matrix, og lad $K : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ være den tilhørende kvadratiske form, idet den naturlige basis for $\mathbb{R}^k$ benyttes.

(Opgaven fortsættes)

(Opgave 6 fortsat)

Angiv for et vilkårligt $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ matricen for linearformen $dK_{\underline{a}}$ (differentialet af funktionen K) og matricen for den kvadratiske form $d^2K_{\underline{a}}$ (differentialet af anden orden af K), idet den naturlige basis stadig benyttes.

Opskriv Taylor's grænseformel for funktionen K udviklet ud fra $\underline{a}$, idet led af anden orden medtages, og begrund, at leddet $\varepsilon(\underline{h}) \, \|\underline{h}\|^2$ (hvor $\varepsilon(\underline{h}) \to 0$ for $\underline{h} \to \underline{0}$) bortfalder.

Opgave nr. 7.

Gør rede for, at ligningen

$$e^{x-z} - 1 - x - yz + xy + y^2 = 0$$

i en omegn af $(0,0,0)$ i $\mathbb{R}^3$ fastlægger z som en C^2-funktion $z = g(x,y)$, og vis, at g har lokalt minimum i $(0,0)$.