KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1978/79

MATEMATIK 101

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes (også lommeregnere).

Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 6 af følgende 7 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave nr. 1.

For hvilket eller hvilke $a \in \mathbb{C}$ har det lineære lignings-system

$$\begin{aligned} (2-2a)x_1 \phantom{{}+ax_2} + x_3 &= 0 \\ a\,x_1 + ix_2 \phantom{{}+x_3} &= -1 \\ -i\,x_1 + ax_2 + x_3 &= i \end{aligned}$$

ingen løsninger, og for hvilket eller hvilke $a \in \mathbb{C}$ har det mere end én løsning? Bestem løsningsmængden i det sidstnævnte tilfælde.

Opgave nr. 2.

Find en Jordan-matrix for en endomorfi f af et 5-dimensionalt komplekst vektorrum, når det er givet, at f har 2-dimensional kerne, og at $f^3 = 0$ og $f^2 \neq 0$. Begrund resultatet, herunder også at der kun er én mulighed for den ønskede Jordan-matrix (pånær permutation af blokkene).

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1978-79
Matematik 101

Opgave nr. 3.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ har med hensyn til de naturlige baser for $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$ matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} .$$

Find en basis for $\mathbb{R}^3$ og en basis for $\mathbb{R}^4$, så f med hensyn til disse nye baser har matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Opgave nr. 4.

Lad f være en endomorfi af et vektorrum V, og lad U være et underrum af V, som er invariant ved f.

1) Vis, at hvis $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p$ er egenvektorer for f hørende til indbyrdes forskellige egenværdier, og hvis $\underline{v}_1 + \ldots + \underline{v}_p \in U$, så gælder $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p \in U$. (Benyt f.eks. induktion efter p på lignende måde som i beviset for, at egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er lineært uafhængige.)

(Opgaven fortsættes)

(Opgave 4 fortsat)

2) Antag yderligere, at V er et endelig-dimensionalt komplekst vektorrum med indre produkt, og at f er en normal endomorfi. Vis, at U er invariant ved den adjungerede endomorfi f^*, og at $U^\perp$ er invariant ved f. (Begrund og udnyt f.eks., at enhver vektor i U er sum af egenvektorer for f tilhørende U.)

Opgave nr. 5.

Vis, at der findes åbne intervaller U, V og W, således at $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in U \times V \times W$, og således at ligningerne

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$2x^2 + 5y^2 + 8z^2 = 4$$

for $(x,y,z) \in U \times V \times W$ fastlægger y og z som vilkårligt ofte differentiable funktioner af x. Udregn differentialkvotienterne af 1. og 2. orden af disse to funktioner for $x = \frac{2}{3}$.

Opgave nr. 6.

Lad F betegne fællesmængden mellem kuglefladen i $\mathbb{R}^3$ med ligning

$$(x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 13$$

og kvadrikken med ligning

$$4x_1 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

(Opgaven fortsættes)

(opgave 6 fortsat)

1) Begrund, at der findes $\underline{a}$, $\underline{b} \in F$, så

$$\|\underline{a}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{b}\|_2$$

for alle $\underline{x} \in F$, idet $\| \ \|_2$ betegner den euklidiske norm i $\mathbb{R}^3$, altså $\|\underline{x}\|_2{}^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$.

2) Find $\underline{a}$ og $\underline{b}$.

Opgave nr. 7.

I $\mathbb{R}^3$ betragtes kvadrikken K med ligningen

$$x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3 = 0 .$$

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ skærer tangentplanen til K i punktet $(a,a,0)$ kvadrikken i to rette linier. Angiv en parameterfremstilling for hver af disse og en parameterfremstilling for tangentplanen.