KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1978

MATEMATIK 101

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler kan medbringes (også lommeregnere).
Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 6 af følgende 7 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave nr. 1.

Et lineært ligningssystem består af ligningerne

$$x_j - ax_{j+1} = 0 \,, \qquad j = 1,2,3,$$

samt ligningen $x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$. For hvilke værdier af $a \in \mathbb{C}$ har ligningssystemet ingen løsninger, og for hvilke værdier af $a \in \mathbb{C}$ har det uendelig mange løsninger?

Opgave nr. 2.

Idet det duale til vektorrummet $\mathbb{R}^2$ på sædvanlig måde identificeres med $\mathbb{R}^2$, ønskes bestemt den duale basis til basen $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ for $\mathbb{R}^2$, hvor $\underline{e}_1 = (1,2)$, $\underline{e}_2 = (3,4)$.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3.

I denne opgave betegner $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en endomorfi, som ikke er en homoteti. (For ethvert $\lambda \in \mathbb{R}$ gælder altså $f \neq \lambda e$, hvor $e\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er den identiske afbildning.) Endvidere betegner vi med N vektorrummet af endomorfier $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, for hvilke $g \circ f = f \circ g$.

1) Bevis, at $\dim N \geq 2$.

2) Lad $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ være den til f hørende matrix med hensyn til den naturlige basis for $\mathbb{R}^2$. Find en 4×4-matrix $\underline{\underline{M}}$, således at der for ethvert sæt $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ gælder biimplikationen

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{M}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Bevis, at $\operatorname{rg} \underline{\underline{M}} \geq 2$.

4) Bevis, at $\dim N = 2$.

Opgave nr. 4.

Lad endomorfien $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ være defineret ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3\ ,\ 2x_2 + x_3\ ,\ 2x_3)\ .$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 4 fortsat)

Godtgør, at f ikke er diagonaliserbar, og find en Jordanmatrix $\underline{\underline{B}}$ for f, samt en basis for $\mathbb{C}^3$ med hensyn til hvilken $\underline{\underline{B}}$ er den til f hørende matrix.

Opgave nr. 5.

I et reelt vektorrum med indre produkt er givet et endeligt sæt af vektorer $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$. Med $\underline{\underline{A}}$ betegnes den $n \times n$-matrix hvis element i i'te række og j'te søjle er det indre produkt af $\underline{v}_i$ med $\underline{v}_j$. Bevis, at sættet $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ er lineært afhængigt, hvis og kun hvis $\det \underline{\underline{A}} = 0$.
(Vink: Se på den til $\underline{\underline{A}}$ hørende kvadratiske form).

Opgave nr. 6.

Vis, at løsningsmængden til ligningen

$$x^2 + 2xy + 2xz - 4x - 6y - 6z = 0$$

er en hyperbolsk cylinder i $\mathbb{R}^3$. Angiv en parameterfremstilling for dens akse (d.v.s. mængden af dens centre), samt længden af normalsnittets (d.v.s. ledekvadrikkens) halvakser.

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1978
Matematik 101

Opgave nr. 7.

I $\mathbb{R}^2$ benyttes koordinatfunktionerne x_1, x_2, og i et andet eksemplar af $\mathbb{R}^2$ benyttes koordinatfunktionerne y_1, y_2. Vi betragter følgende afbildning $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \exp(x_1+x_2) \end{pmatrix} .$$

1) Begrund, at der findes en åben omegn U af $(-1,1)$ i $\mathbb{R}^2$, en åben omegn V af $(-1,2)$ i $\mathbb{R}^2$, samt en C^2-funktion $\beta: V \to \mathbb{R}$, således at φ afbilder U bijektivt på V med følgende afbildning $\psi: V \to U$ som invers:

$$\psi = \begin{pmatrix} y_1 \\ \beta \end{pmatrix} .$$

2) Vis, at der gælder $D_1\beta = -y_2 D_2\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$.

3) Bestem $D_2^2\beta(-1,2)$.