KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1977/78

MATEMATIK 101.

Alle hjælpemidler kan medbringes (også lommeregnere).

Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 6 af følgende 7 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave nr. 1.

Udregn

$$\det\begin{pmatrix} x+i & ix-1 & -ix+1 \\ x-i & -ix-1 & -ix-1 \\ x-1 & x-1 & x-1 \end{pmatrix}$$

og angiv rødderne i det fremkomne polynomium i den komplekse variable x.

Opgave nr. 2.

I et vektorrum U over $\mathbb{R}$ af endelig dimension $n \geqq 4$ er givet en basis $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$. Bestem dimensionen af fællesmængden F af kernerne for alle de linearformer på U, som

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

er 0 på de tre vektorer $\underline{u}_1 = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_4$, $\underline{u}_2 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_3 + 3\underline{e}_4$ og $\underline{u}_3 = \underline{e}_1 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4$. Undersøg, om $2\underline{e}_3 + \underline{e}_4 \in F$.

Opgave nr. 3.

Undersøg, hvorledes dimensionen af løsningsrummet for det lineære ligningssystem (med komplekse ubekendte x, y, z)

$$\begin{aligned} x + ay + bz &= 1 \\ ax + by + z &= a \\ bx + y + az &= b \end{aligned}$$

afhænger af de komplekse tal a og b.

Opgave nr. 4.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en given kvadratisk reel matrix med alle elementer under hoveddiagonalen lig med 0, altså en øvre trekantsmatrix.

Det antages først, at alle elementerne i hoveddiagonalen er indbyrdes forskellige. Vis, at der findes en invertibel (= regulær) matrix $\underline{\underline{S}}$, for hvilken $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

(opgaven fortsættes)

(opgave 4 fortsat)

Det antages dernæst, at alle elementerne i hoveddiagonalen i $\underline{\underline{A}}$ er ens, og at der findes en invertibel matrix $\underline{\underline{S}}$, for hvilken $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix. Vis, at $\underline{\underline{A}}$ er en diagonalmatrix.

Opgave nr. 5.

Lad U være et vektorrum over $\mathbb{C}$, og lad $h:U \to [0,\infty[$ være en afbildning, som opfylder betingelserne

$$h(\lambda\underline{u}) = |\lambda|h(\underline{u}) \quad \text{for} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \underline{u} \in U,$$

$$h(\underline{u}+\underline{v}) \leq h(\underline{u}) + h(\underline{v}) \quad \text{for} \quad \underline{u},\underline{v} \in U.$$

Vis, at $V = h^{-1}(0)$ er et underrum i U, at h er konstant på hvert siderum (= sideunderrum) til V, samt at $\frac{U}{V}$ bliver et normeret rum, når normen $\rho(\underline{u}+V)$ af et siderum $\underline{u} + V$ defineres som den konstante værdi af h på dette siderum.

Opgave nr. 6.

Vis, at der findes netop 1 selvadjungeret endomorfi $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ med $(1,-2,0,2)$ som egenvektor hørende til egenværdien 18 og $(2,0,2,-1)$ som egenvektor hørende til egenvær-

(opgaven fortsættes)

(opgave 6 fortsat)

dien -9, samt med 0 som egenværdi med multiplicitet 2. Bestem matricen for f ved brug af den naturlige (=kanoniske) basis for $\mathbb{R}^4$.

Opgave nr. 7.

Lad $x_1,\ldots,x_k$ være positive tal. Vis, at det harmoniske middeltal H, defineret ved

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_k}\right) ,$$

er mindre end eller lig med det aritmetiske middeltal

$$A = \frac{1}{k}(x_1 + \ldots + x_k) ,$$

og at $A = H$ kun indtræffer, hvis $x_1 = \ldots = x_k$.

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1977/78

Matematik 101

Vedlægges i udfyldt stand den skriftlige besvarelse.

Navn:

Eks.nr.:

Forventer ved mundtlig eksamen at blive eksamineret af:

Bent Fuglede ☐

Hans Tornehave ☐

Er dog villig til at skifte eksaminator:

Ja ☐

Nej ☐

Tidspunkt for mundtlig eksamen vil blive meddelt ved opslag på Matematisk Institut senest tirsdag eftermiddag den 10. januar.