KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977.

MATEMATIK 101

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes. (Også lommeregnere)

Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 6 ud af følgende 8 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave nr. 1

Vis, at der findes netop én endomorfi (= lineær afbildning) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med $f(1,2,0) = (3,-1,2)$, $f(3,1,1) = (0,2,1)$ og $f(1,-1,2) = (3,3,4)$. Vis, at den til f duale afbildning f^* ikke er injektiv, og angiv en fra nulformen forskellig linearform, der tilhører dens kerne (= nulrum).

Opgave nr. 2

Find en lineær ligning med reelle koefficienter og med 4 ubekendte x_1, x_2, x_3, x_4, idet det er givet, at dens reelle løsninger er netop de vektorer $(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4$, for hvilke der findes mindst én vektor $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, som tilfredsstiller følgende ligninger:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3t_1 - 4t_2 \phantom{{}+ t_3} - 1 \\
x_2 &= -t_1 - t_2 + t_3 \\
x_3 &= t_1 + 2t_2 - 2t_3 - 2 \\
x_4 &= -t_1 \phantom{{}- t_2} + t_3 + 3 \quad .
\end{aligned}$$

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977

Matematik 101

Opgave nr. 3

I vektorrummet $\mathbb{R}^4$ med det sædvanlige indre produkt betegner U_a for $a \in \mathbb{R}$ løsningsrummet for ligningssystemet

$$3x_1 + ax_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$
$$4x_1 + 3x_2 + ax_3 + x_4 = 0 ,$$

medens V_a betegner løsningsrummet for ligningssystemet

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - ax_4 = 0$$
$$ax_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 .$$

Findes der en værdi af a, for hvilken U_a og V_a er hinandens ortogonale komplementer?

Opgave nr. 4

Lad U være et 3-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{R}$, og lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en basis for U. Lad $f: U \to U$ være den ved $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2$, $f(\underline{e}_2) = 2\underline{e}_3$, $f(\underline{e}_3) = 4\underline{e}_1$ fastlagte endomorfi (= lineære afbildning). Find alle egenrum for f.

Det antages nu yderligere, at U er et vektorrum med indre produkt, og at $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er et ortonormalsystem. Vis for enhver vektor $\underline{u} \in U$, at $\|f(\underline{u})\| \geqq \|\underline{u}\|$. For hvilke $\underline{u} \in U$ gælder lighedstegnet?

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977
Matematik 101

Opgave nr. 5

Lad U være et n-dimensionalt vektorrum med indre produkt, og lad $f: U \to U$ være en endomorfi (= lineær afbildning). Vis, at $f^* \circ f$ og $f \circ f^*$ er selvadjungerede, samt at det for enhver egenvektor $\underline{e}$ for $f^* \circ f$ gælder, at $f(\underline{e})$ er $\underline{0}$ eller egenvektor for $f \circ f^*$ hørende til samme egenværdi. Vis dernæst, at U har en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ for hvilken $f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_n)$ er indbyrdes ortogonale.

Opgave nr. 6

Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ være en åben mængde, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ en C^3-funktion og $a \in \Omega$ et givet punkt. Det antages, at $df_a(h) = d^2 f_a(h) = 0$ for alle $h \in \mathbb{R}^k$, medens $d^3 f_a$ ikke er identisk 0. Vis, at f ikke har lokalt ekstremum i punktet a.

Opgave nr. 7

En funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x,y) = (x^2 - y)^2 - 2x^5 + x^6 .$$

Vis, at f ikke har et lokalt ekstremum i $(0,0)$. Vis, at f har en mindste værdi. Vis, at f antager denne værdi i netop ét punkt, og bestem dette punkt. Den mindste værdi af f forlanges ikke eksplicit udregnet.

(Opgavesættet fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977
Matematik 101

Opgave nr. 8

Hvilken slags keglesnitsflade (= kvadrik i $\mathbb{R}^3$) har ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - 2x - 2y - 2z - 5 = 0 .$$