KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1976/77.

MATEMATIK 101.

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Besvarelsen anses for fuldstændig, hvis 9 ud af følgende 10 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave 1.

Lad U være et vektorrum over $\mathbb{R}$, og lad $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ være en basis for U. En anden basis for U er givet ved $(\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3') = (\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)\underline{\underline{S}}$, hvor $\underline{\underline{S}}$ er en regulær matrix. For hvilke værdier af det reelle tal p kan $\underline{\underline{S}}$ vælges, således at $\underline{e}_1' = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ og $\underline{e}_2' = \underline{e}_2 + \underline{e}_3$, medens punktet, som ved brug af basis $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ har koordinater $(2,p,2)$, ved brug af basis $(\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$ får koordinater $(1,1,1)$.

Opgave 2.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en kompleks $n{\times}n$-matrix. Det antages, at $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$ er regulær for alle $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Vis, at $\underline{\underline{A}}$ er nilpotent.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1976/77.
Matematik 101.

Opgave 3.

Find den største værdi af xyz for alle reelle talsæt (x,y,z), som tilfredsstiller $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 3$.

Opgave 4.

Lad E være et 3-dimensionalt euklidisk rum, lad $L \subset E$ være en ret linie og $P \in E \setminus L$ et punkt. Vis, at mængden M af punkter med samme afstand fra L og P er en parabolsk cylinder. (Benyt et hensigtsmæssigt koordinatsystem i E, f.eks. således at L er koordinatakse og P ligger på en anden koordinatakse).

Opgave 5.

Lad U være et 3-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$ med basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, og lad V være et endelig-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$. Lad $\xi: U \to V$ og $\eta: U \to V$ være lineære afbildninger med nulrum $\xi^{-1}(\underline{0}) = \mathrm{Span}(\underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_3)$ og $\eta^{-1}(\underline{0}) = \mathrm{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$. Vis, at ξ og η er lineært uafhængige, og at fællesmængden for nulrummene for $\xi + \eta$ og $\xi - \eta$ er $\mathrm{Span}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1976/77.
Matematik 101.

Opgave 6.

I en n×n-matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{jk})$ er $a_{1k} = a_{nk} = a_{j1} = a_{jn} = 1$ for $j,k = 1,\ldots,n$, medens $a_{jk} = 0$, hvis hverken j eller k er 1 eller n. Angiv for $n \geq 3$ dimensionen af egenrummet hørende til 0. Bestem dernæst for $n = 3$ og for $n = 4$ alle egenværdier for $\underline{\underline{A}}$ og angiv i begge tilfælde deres rodmultiplicitet og egenværdimultiplicitet.

Opgave 7.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en symmetrisk og $\underline{\underline{B}}$ en skævsymmetrisk n×n-matrix med elementer fra $\mathbb{R}$. Vis, at $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ er normal, hvis og kun hvis $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ er skævsymmetrisk.

Opgave 8.

For $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ definerer vi

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 8x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 + 6x_2y_2 \ .$$

Vis, at dette er et indre produkt. Angiv den rette linie L gennem (0,0), som er ortogonal på vektoren (1,0) ved brug af dette indre produkt. For $c > 0$ betragter vi mængden

(opgaven fortsættes)

(opgave 8 fortsat)

$$K_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \leqq c\}\ .$$

Vis for $k \in \mathbb{R}$ at mængden af punkter $(x,k) \in K_c$ for c tilstrækkelig stor er et liniestykke med midtpunkt på L.

Opgave 9.

Lad den kvadratiske form $K(\underline{x})$ på $\mathbb{R}^4$ være defineret ved $K(\underline{x}) = x_1{}^2 + x_2{}^2 - (x_3+x_4)^2$. Angiv positivitetsindex og negativitetsindex for K og vis, at positivitetsunderrummene for K udspænder hele $\mathbb{R}^4$.

Opgave 10.

Lad $S \subset \mathbb{R}^2$ være mængden af løsninger til ligningen $x^2+y^2 = x^4+y^4$. Vis, at alle punkter af S på nær $(0,0)$ ligger i ringen mellem de 2 cirkler med fælles centrum $(0,0)$ og radier 1 og $\sqrt{2}$, idet hver af de 2 cirkler indeholder netop 4 punkter af S. Vis, at S i en omegn af ethvert punkt $(x_0,y_0) \in S\setminus\{0\}$ er bestemt som graf for en differentiabel funktion (altså enten $y = \varphi(x)$ eller $x = \psi(y)$), således at S har en tangent i hvert punkt undtagen $(0,0)$. Find de punkter af S, hvor tangenten er parallel med en af koordinatakserne.