KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1976.

MATEMATIK 101.

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Besvarelsen anses for fuldstændig hvis 9 ud af følgende 10 opgaver er korrekt besvaret.

Opgave 1.

Find for ethvert $a \in C$ den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} ax_1 \phantom{{}+ ax_2} - ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 \phantom{{}+ a^2x_3} &= 2 \\ ax_2 + a^2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Opgave 2.

Vis, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er en reel (nxn)-matrix, da er $rg(\underline{\underline{A}}) < n$ netop når der findes en fra nulmatricen forskellig (nxn)-matrix $\underline{\underline{B}}$ så $\underline{\underline{BA}} = \underline{\underline{0}}$.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1976

Matematik 101.

Opgave 3.

Lad afbildningen $f: R^2 \to R$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 & , |y| \geq |x| \\ x^2 & , |x| > |y| \quad \text{og} \quad x < 0 \\ x^3 & , |x| > |y| \quad \text{og} \quad x > 0 \end{cases}$$

Undersøg om f er differentiabel i $(0,0)$.

Opgave 4.

Find et talsæt a,b,c og k, således at den i R^2 ved

$$A = \{(x,y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 = k\}$$

definerede punktmængde er en ellipse med centrum i $(0,0)$, med $(4,2)$ som det ene endepunkt af storaksen og med lilleaksen halvt så lang som storaksen (altså med toppunkter i $(4,2)$, $(-4,-2)$, $(-1,2)$ og $(1,-2)$).

Opgave 5.

Lad de to reelle (3×3)-matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være givet ved

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 5 fortsat)

Undersøg om $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er regulær ækvivalente og om $\underline{\underline{A}}^n$ er regulær ækvivalent med $\underline{\underline{B}}^m$ for noget par af naturlige tal (n,m), hvor $n > 0$ og $m > 0$.

Opgave 6.

Lad U med basis $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ og V med basis $(\underline{f}_1,\underline{f}_2,\underline{f}_3)$ være vektorrum over L. Lad $g:U \to V$ være den lineære afbildning som defineres ved

$$g(\underline{e}_1) = \underline{f}_2 + \underline{f}_3,\ g(\underline{e}_2) = \underline{f}_1 + \underline{f}_3 \text{ og } g(\underline{e}_3) = \underline{f}_1 + \underline{f}_2.$$

Lad U^* og V^* være de til U og V duale rum, og lad g^* være den til g duale afbildning. Lad $\underline{v}^* \in V^*$ være givet ved $v^*(y_1\underline{f}_1 + y_2\underline{f}_2 + y_3\underline{f}_3) = y_1 + y_2 + y_3$. Udregn for $u^* = g^*(\underline{v}^*)$ værdien af $\underline{u}^*(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3)$.

Opgave 7.

Lad U være et 3-dimensionalt reelt vektorrum, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi, som ved passende valg af basis $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ har skævsymmetrisk (antisymmetrisk) matrix. Vis, at restriktionen af f til billedrummet $f(U)$ afbilder dette bijektivt på sig selv.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1976

Matematik 101.

Opgave 8.

Lad $p(t)$ være et komplekst polynomium og $\underline{\underline{A}}$ en kompleks (nxn)-matrix med $p(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}}$. Vis, at $p(\lambda) = 0$ for enhver egenværdi λ for $\underline{\underline{A}}$. Find et eksempel hvor $p(\lambda) = 0$ uden at λ er egenværdi for $\underline{\underline{A}}$.

Opgave 9.

En lineær afbildning $\varphi: R^2 \to R^2$ er givet ved

$$\varphi(x_1, x_2) = (\sqrt{3/2}\, x_1,\ x_1 + x_2).$$

På R^2 anvendes det sædvanlige indre produkt defineret ved $(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Find de par af indbyrdes ortogonale enhedsvektorer i R^2, som ved φ igen afbildes i par af ortogonale vektorer.

Opgave 10.

Vi lader $\underline{\underline{E}}_{ij}$ betegne den (2x2)-matrix, som har et ettal på den (i,j)'te plads og ellers nuller.

Vis, at hvis $\underline{\underline{A}}_i \in \{\underline{\underline{E}}_{11}, \underline{\underline{E}}_{12}, \underline{\underline{E}}_{21}, \underline{\underline{E}}_{22}\}$, $i = 1,2,3,4$ og 5, da er

$$\Sigma_{\sigma \in S_5} \operatorname{sign}(\sigma)\, \underline{\underline{A}}_{\sigma(1)} \cdot \underline{\underline{A}}_{\sigma(2)} \cdot \underline{\underline{A}}_{\sigma(3)} \cdot \underline{\underline{A}}_{\sigma(4)} \cdot \underline{\underline{A}}_{\sigma(5)} = \underline{\underline{0}}.$$

Vis dernæst, at for 5 vilkårlige (2x2)-matricer $\underline{\underline{A}}_1, \ldots, \underline{\underline{A}}_5$ er

$$\Sigma_{\sigma \in S_5} \operatorname{sign}(\sigma)\, \underline{\underline{A}}_{\sigma(1)} \cdot \quad \cdot \underline{\underline{A}}_{\sigma(5)} = \underline{\underline{0}}\ .$$