KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1975/76.

MATEMATIK 101.

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave 1.

Lad $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ være en ortonormalbasis for et tredimensionalt unitært vektorrum. Lad endomorfien f være givet ved

$$f(\underline{e}_1) = i\underline{e}_2,\ f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 + i\underline{e}_2,\ f(\underline{e}_3) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 .$$

Find $rg(f)$ og $rg(f^2)$. Undersøg om f er normal.

Opgave 2.

Betragt matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og } \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Find for alle α, β i $\mathbb{C}$ det karakteristiske polynomium af $\alpha\underline{\underline{A}} + \beta\underline{\underline{B}}$ og vis at $\alpha\underline{\underline{A}} + \beta\underline{\underline{B}}$ er nilpotent for alle α og β.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1975/76.

Matematik 101.

Opgave 3.

Lad $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være matricerne fra opgave 2. Find $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ og vis at der ikke findes nogen basis for $\mathbb{C}^3$ med hensyn til hvilken både $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ beskrives ved øvre trekantsmatricer.

Opgave 4.

Et legeme med volumen 1 har form som en cylinder (med højde h og diameter 2r) oven på hvilken er sat en halvkugle (med radius r). Find h/r når det antages, at beholderens overflade er minimal. (Kuglens overflade er $4\pi r^2$, dens volumen er $4/3\pi r^3$).

Opgave 5.

Lad K være den kvadratiske form på $\mathbb{R}^3$ givet ved $K(v_1, v_2, v_3) = v_1^2 + v_2^2 + \alpha v_3^2$, hvor $\alpha \in \mathbb{R}$. Vis at mængden $N_\alpha = \{\underline{v} \mid K(\underline{v}) = 0\}$ er et underrum hvis og kun hvis $\alpha \geq 0$. Find N_α for ethvert $\alpha \geq 0$.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1975/76.

Matematik 101.

Opgave 6.

Lad den kontinuerte funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vis at f er retningsdifferentiabel i $(0,0)$ i enhver retning og undersøg om f er differentiabel i $(0,0)$.

Opgave 7.

Lad $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ være en basis for det reelle vektorrum V og lad $\underline{e}_1^*,\ldots,\underline{e}_n^*$ være den duale basis for det duale vektorrum V^*. Lad U være underrummet af V udspændt af de $n-1$ vektorer $\underline{e}_1+\underline{e}_2$, $\underline{e}_1+\underline{e}_3,\ldots,\underline{e}_1+\underline{e}_n$. Find annihilatoren af U i V^* og bestem dennes dimension.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1975/76.

Matematik 101.

Opgave 8

Lad G betegne mængden af reelle 2x2 matricer af formen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

Vis at G er en undergruppe af $GL(2,\mathbb{R})$.
For ethvert g i G defineres $\hat{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $\hat{g}(x) = \alpha x + \beta$.
Vis at afbildningen $g \to \hat{g}$ er en bijektiv homomorfi af gruppen G på gruppen af bijektive affine transformationer af $\mathbb{R}$ på sig selv med sammensætning som produkt.

Opgave 9.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en kompleks nxn matrix. Vis at egenværdierne for $\underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}}$ er ikke negative. Vis herved at $\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}}$ er regulær ($\underline{\underline{E}}$ er enhedsmatricen i $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Vis endelig at

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}})^{-1} = (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^*)^{-1}\underline{\underline{A}}.$$

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1975/76.

Matematik 101.

Opgave 10.

Lad f være en endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum V. Vis at der findes en endomorfi g af V således at $fgf = f$.

(Man kan f.eks. vælge et til K_f komplementært underrum U. $f|U$ vil da være en isomorfi af U på $f(U)$ og man kan definere g_o på $f(U)$ som den inverse til $f|U$).