KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1975.

MATEMATIK 101.

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1

Lad $\underline{\underline{A}}_n$ være den reelle $n \times n$-matrix med elementerne $a_{ij} = i + j$ for $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq n$. Find $\operatorname{Det} \underline{\underline{A}}_n$, for $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Opgave nr. 2

Lad $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}_{m,n}(L)$ hvor $\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{O}}_{m,n}$. Vis at $\operatorname{rg}(\underline{\underline{A}}) \leq r$ hvis og kun hvis der findes $\underline{\underline{B}}$ i $\mathcal{M}_{m,r}(L)$ og $\underline{\underline{C}}$ i $\mathcal{M}_{r,n}(L)$ således at $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$.

Opgave nr. 3

Lad $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \cdots, \underline{e}_n$ være en basis for vektorrummet V over $\mathbb{R}$, og lad f betegne afbildningen i $\mathcal{L}(V,V)$ for hvilken $f(\underline{e}_n) = \underline{e}_1$ og $f(\underline{e}_k) = \underline{e}_{k+1}$ for $1 \leq k < n$.

Find det karakteristiske polynomium for f og vis at for $n > 1$ er f ikke regulær-ækvivalent med den identiske afbildning.

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1975.
Matematik 101.

Opgave nr. 4

Lad ξ og $\eta_1, \cdots, \eta_p$ være linearformer på et endeligt dimensionalt vektorrum. Vis at $\bigcap_{i=1}^{p} K_{\eta_i} \subseteq K_\xi$ netop hvis $\xi \in \mathrm{Span}(\eta_1, \cdots, \eta_p)$. (Man kan evt. anvende $3.2^*.5.$ (i) og (iv)).

Opgave nr. 5

Betragt de reelle 2×2-matricer

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vis, at $(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})^{2m} = \underline{\underline{E}}$ for ethvert $m \in \mathbb{N}$ og at $(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})^n \neq \underline{\underline{O}}$ for ethvert n. Vis endelig at det er umuligt at vælge en basis i $\mathbb{R}^2$ for hvilken $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ begge kan fremstilles som øvre trekantsmatricer.

Opgave nr. 6

Lad $\underline{u}$ og $\underline{v}$ være vektorer i $\mathbb{C}^2$ med $\|\underline{u}\| = 1$. Vis at der findes en selvadjungeret lineær afbildning $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ således at $f(\underline{u}) = \underline{v}$ hvis og kun hvis $\underline{u} \cdot \underline{v} \in \mathbb{R}$.

Opgave nr. 7

Lad $\underline{\underline{U}}$ være en unitær kompleks 2×2-matrix. Vis at hvis $\mathrm{Det}(\underline{\underline{U}}) = 1$ så er $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{U}}) \in \mathbb{R}$.

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1975.
Matematik 101.

Opgave nr. 8

Lad Q være kvadrikken i $\mathbb{R}^4$ givet ved ligningen $3(x_1-1)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 + x_4 + 2 = 0$. Undersøg om Q er en centrumskvadrik.

Opgave nr. 9

I $\mathbb{R}^2$ betragtes mængderne

$$M_1 = \{(x,y) \mid x=0,\ y \geq 0\} \quad \text{og} \quad M_2 = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y = x(1+x)^{-1}\}.$$

Angiv $\mathrm{Conv}(M_1 \cup M_2)$, gerne suppleret med grafisk fremstilling.

Opgave nr. 10

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være funktionen givet ved $f(x,y) = (x^2 \cos y,\ x^2 \sin y)$. Vis at hvis Ω er en åben delmængde af mængden $\{(x,y) \mid x \neq 0\}$ så er $f(\Omega)$ åben i $\mathbb{R}^2$. Angiv en åben mængde Ω i $\mathbb{R}^2$ således at $f(\Omega)$ ikke er åben.