Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1974/75.

MATEMATIK 101.

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være funktionen defineret ved $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$.
Find minimum af f i området

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 9 \wedge x \leqq 2\}$$

Opgave nr. 2.

Lad $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være to $(n \times n)$-matricer over et tallegeme L. ($L = \mathbb{R}$ eller $L = \mathbb{C}$). Vis, at hvis $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$, da er 0 egenværdi for $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$.

Opgave nr. 3.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en kompleks $n \times n$ matrix, og lad $\underline{\underline{E}}$ betegne enhedsmatricen i $\mathcal{M}_{nn}$. Vis at $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{E}}$ ikke er regulær-ækvivalente.

Opgave nr. 4.

Vis at den nedenstående matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar, og

(Opgaven fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, Vinteren 1974/75
Matematik 101

Opgave nr. 4 (fortsat)

angiv en diagonalform. Vis at $\underline{\underline{A}}$ ikke er unitær.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Opgave nr. 5.

$\mathbb{R}^3$ betragtes på sædvanlig vis som et euklidisk affint rum med koordinatsystemet $((0,0,0);\ (1,0,0)(=\underline{e}_1),\ (0,1,0)(=\underline{e}_2),\ (0,0,1)(=\underline{e}_3))$.

Lad den affine afbildning $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved:

$f((0,0,0)) = (1,1,1)$

$\hat{f}(\underline{e}_1) = \underline{v}_1$, hvor $\underline{v}_1$ har koordinaterne $(a,0,0)$

$\hat{f}(\underline{e}_2) = \underline{v}_2$, hvor $\underline{v}_2$ har koordinaterne $(a,b,1-c)$

$\hat{f}(\underline{e}_3) = \underline{v}_3$, hvor $\underline{v}_3$ har koordinaterne $(0,b,-c)$

Find mængden af (a,b,c) for hvilket f er en affin transformation (d.v.s. f bijektiv).

Findes der et talsæt (a,b,c) , så f er en kongruens?

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 6.

Lad W være et vilkårligt vektorrum over legemet L ($L = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

Lad endvidere V være et endelig dimensionalt vektorrum og U et underrum af V.

Vis, at hvis f er en lineær afbildning fra U til W, da findes en lineær afbildning g fra V til W så

$$g(\underline{u}) = f(\underline{u}) \quad \text{for alle} \quad \underline{u} \in U .$$

Opgave nr. 7.

Lad $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være funktionen defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\cos(x^{-1}y) & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

Afgør hvorvidt f er differentiabel i punkterne $(1,0)$, $(0,0)$ og $(0,1)$.

Opgave nr. 8.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Opgaven fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, Vinteren 1974/75
Matematik 101.

Opgave nr. 8 (fortsat)

Find $\underline{\underline{A}}$'s karakteristiske polynomium og vis dernæst, at

$$\underline{\underline{A}}^5 - 6\underline{\underline{A}}^4 + 9\underline{\underline{A}}^3 - 6\underline{\underline{A}}^2 + 8\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$$

Opgave nr. 9.

Lad V og V' være 9-dimensionale reelle vektorrum i dualitet via bilinearformen $<\cdot,\cdot>$, og lad $(\underline{e}_1 \cdots \underline{e}_9)$ og $(\underline{e}'_1, \cdots, \underline{e}'_9)$ være et par af duale baser for V og V' .
Vis at for ethvert par f,g af endomorfier af V gælder

$$\Sigma_{n=1}^{9} < (f \circ g)\underline{e}_n , \underline{e}'_n > = \Sigma_{n=1}^{9} < (g \circ f)\underline{e}_n , \underline{e}'_n > .$$

Vink.

Udnyt for eksempel at $g(\underline{e}_i) = \Sigma_{j=1}^{9} < g(\underline{e}_i) , \underline{e}'_j > \underline{e}_j$

Opgave nr. 10.

Lad $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ være en basis for et 3-dimensionalt komplekst vektorrum.
Lad en endomorfi f af V være givet ved

$$f(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 , f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 , f(\underline{e}_3) = 2\underline{e}_3 .$$

Find samtlige ved f invariante underrum.
(Vink. Man kan evt. vise, at hvis U er et fra $\{\underline{0}\}$ forskelligt invariant underrum, da vil $\underline{e}_1 \in U$ eller $\underline{e}_3 \in U$) .