Københavns universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1974.

MATEMATIK 101.

Skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

Angiv antallet af permutationer f af mængden $\{1,2,3,\cdots,2n\}$, hvor $n > 1$, således at $f(n) \geq n$.

Opgave nr. 2.

Lad (A,V) være et affint rum af dimension 4, og lad der i A være valgt et affint koordinatsystem. Lad P_0: $(1,2,-2,1)$, P_1: $(2,1,-1,0)$, P_2: $(0,3,-3,2)$, P: $(1,1,0,0)$ være punkter i A med de angivne koordinater. Angiv dimensionen af $\mathrm{aff}\{P_0,P_1,P_2\}$. Tilhører P $\mathrm{conv}\{P_0,P_1,P_2\}$?

Opgave nr. 3.

Lad $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3,\underline{e}_4)$ være en ortonormal basis for et reelt eller komplekst vektorrum V med indre produkt. Lad den lineære afbildning f være givet ved
$f(\underline{v}) = 2(\underline{v}\cdot\underline{e}_1)\underline{e}_2 + 2(\underline{v}\cdot\underline{e}_2)\underline{e}_1$. Bestem den til f hørende matrix i den givne basis. Find f's egenværdier og tilhørende egenrum.

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, Sommeren 1974

Matematik 102.

|o|

Opgave nr. 4.

Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{for} \quad |x| \leq |y|, \\ x & \text{for} \quad |x| > |y|. \end{cases}$$

Vis at de partielle afledede for f eksisterer i punktet $(0,0)$. Vis at f ikke er differentiabel i $(0,0)$.

Opgave nr. 5.

Lad V være et endeligt dimensionalt (reelt eller komplekst) vektorrum og f en nilpotent endomorfi af V. Vis at $e_V - f$ er en isomorfi af V, hvor e_V betegner den identiske afbildning af V på sig selv.

Opgave nr. 6.

Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved $\underline{y} = f(\underline{x})$, hvor

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_1x_2 + x_3^2 \\ y_2 &= x_2 + x_1x_2x_3 \\ y_3 &= x_1 + 2x_3 + x_2x_3. \end{aligned}$$

Vis at løsningsmængden $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\}$ indeholder $\underline{0}$ som et isoleret punkt.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1974

Matematik 102.

101

Opgave nr. 7

Lad $\underline{v}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ som for ethvert i, hvor $1 \leq i \leq n$, opfylder at summen af $\underline{v}$'s koordinater pånær den i'te er lig med 0. Vis at $\underline{v} = \underline{0}$.

Opgave nr. 8.

Lad $\underline{x}$ og $\underline{y}$ være vektorer i et endeligt dimensionalt unitært vketorrum $(V,\mathbb{C})$. Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, udtrykt ved hjælp af normen af $\underline{x}$ og $\underline{y}$, for at der findes en unitær afbildning f af V, således at $f(\underline{x}) = \underline{y}$. Begrund svaret.

Opgave nr. 9.

Lad f være en endomorfi af et endeligt dimensionalt vektorrum V og lad $\underline{v}$ være en vilkårlig fra $\underline{0}$ forskellig vektor i V. Lad V_0 betegne underrummet af V frembragt af vektorerne $\underline{v}, f(\underline{v}), f^2(\underline{v}), \dots$. Vis at der findes et helt tal k, således at $\underline{v}, f(\underline{v}), \dots, f^k(\underline{v})$ er en basis for V_0.

Opgave nr. 10.

Lad $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være vilkårlige (2×2)-matricer med elementer fra $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Vis at der findes en skalar λ, således at

$$(\underline{\underline{AB}} - \underline{\underline{BA}})^2 = \lambda \underline{\underline{E}}_{2,2}.$$

(Vink. Bestem, eventuelt ved udregning, udseendet af det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{AB}} - \underline{\underline{BA}}$ og anvend Hamilton-Cayley's sætning.)