Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973/74.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

I $\mathbb{R}^3$ med koordinaterne x_1, x_2, x_3 betragtes funktionen

$$f = (1-e^{x_1})(\sin x_1 + \sin x_2) + \cos x_2 + \cos x_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Vis, at f har lokalt maksimum i punktet $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Opgave nr. 2.

Bevis formlen

$$\operatorname{Arctan}(e^{2x}) = \operatorname{Arctan}(\tanh x) + \frac{\pi}{4}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave nr. 3.

I det euklidiske vektorrum $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ er en kvadratisk form givet ved

$$K_B : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 22x_1^2 + 22x_2^2 + 19x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

(Opgaven fortsættes side 2)

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973/74.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

1° Angiv matricen $\underline{\underline{B}}$ for den tilhørende symmetriske bilinearform, og vis at 18 og 27 er egenværdier for $\underline{\underline{B}}$.

2° Bestem en ortonormal basis for $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, i hvilken K_B er reduceret.

3° Bestem globalt maksimum og minimum for K_B på mængden

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Opgave nr. 4

Lad (M, dist) være et fuldstændigt metrisk rum. Lad $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ være en dalende følge af ikke tomme, afsluttede delmængder F_n af M. Antag, at følgen af diametre $d_n = \mathrm{diam}(F_n)$ konvergerer mod 0 for $n \to \infty$.

Vis, at fællesmængden $\bigcap \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er forskellig fra den tomme mængde og består af netop ét punkt.

Vi minder om, at

$$\mathrm{diam}(F_n) = \sup \{\mathrm{dist}(x, y) \mid (x \in F_n) \wedge (y \in F_n)\}.$$

(Sættet fortsættes side 3)

Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973/74.
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

Opgave nr. 5.

Med $\mathbb{C}^*$ betegnes gruppen af komplekse tal $z \neq 0$ med multiplikation som komposition. Med $O(2,\mathbb{C})$ betegnes undergruppen i $GL(2,\mathbb{C})$ bestående af de matricer $\underline{\underline{A}}$, for hvilke

(1) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$.

Endelig betegnes med $SO(2,\mathbb{C})$ mængden af matricer $\underline{\underline{A}} \in O(2,\mathbb{C})$, for hvilke

(2) $\det \underline{\underline{A}} = 1$.

1° Gør rede for, at $SO(2,\mathbb{C})$ er en undergruppe i $O(2,\mathbb{C})$.

2° Vis, at elementerne i $SO(2,\mathbb{C})$ netop er matricerne af formen

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2+b^2=1, \quad a,b \in \mathbb{C}.$$

3° Vis, at der ved

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(z+z^{-1}) & \frac{-1}{2i}(z-z^{-1}) \\ \frac{1}{2i}(z-z^{-1}) & \frac{1}{2}(z+z^{-1}) \end{pmatrix}.$$

defineres en isomorfi : $\mathbb{C}^* \to SO(2,\mathbb{C})$, og angiv dens inverse.

(Opgaven fortsættes side 4)

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973/74.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

4° Gruppen $SO(2,\mathbb{R})$ af egentlig ortogonale reelle (2×2)-matricer er en undergruppe i $SO(2,\mathbb{C})$. Hvilken undergruppe af $\mathbb{C}^*$ svarer til $SO(2,\mathbb{R})$ ved ovennævnte isomorfi?

Opgave nr. 6.

Betragt en plan kurve med en naturlig parameterfremstilling af klasse C^3, og lad k være en reel konstant. Antag, at tangentdrejningen $\Theta(s)$ og krumningen $\varkappa(s)$ som funktion af buelængden s tilfredsstiller ligningen

$$\varkappa(s) - k = \int_0^s \Theta(u)\,du$$

for alle $s \in \mathbb{R}$.

1° Bestem $\Theta(s)$ og $\varkappa(s)$, idet $\Theta(s)$ som sædvanlig regnes ud fra kurvepunktet svarende til $s=0$.

2° Beskriv kurven når $k=0$.