Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973-74.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

Betragt for ethvert tal $t \in \mathbb{R}$ potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} x^n ,$$

for $x \in \mathbb{R}$.

1° Vis, at denne potensrække har konvergens-radius 1 for alle $t \in \mathbb{R}$.

2° Bestem for ethvert $t \in \mathbb{R}$ mængden A_t bestående af de $x \in \mathbb{R}$ for hvilke potensrækken er konvergent.

3° Idet man for hvert $t \in \mathbb{R}$ definerer funktionen $f_t :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ ved

$$f_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t} x^n ,$$

skal det vises, at dennes afledede $\frac{df_t}{dx}$ på intervallet $]-1, 1[$ tilfredsstiller differentialligningen

$$x \cdot \frac{df_t}{dx} = f_{t-1} .$$

4° Bestem $f_{-2}(x)$, og vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

(Opgaven fortsættes side 2.)

Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973-74.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

5° Vis, at funktionsfølgen $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ konvergerer uniformt på $]-1, 1[$, og bestem grænsefunktionen.

Opgave nr. 2.

$\mathbb{R}^3$ betragtes på sædvanlig måde som euklidisk affint rum med det kanoniske koordinatsystem

$$((0,0,0);\ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)).$$

For hvert $\alpha \in \mathbb{R}$ betegner $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ den affine afbildning, som m.h.t. det kanoniske koordinatsystem er givet ved matrixfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1° Bestem for $\alpha \in \mathbb{R}$ samtlige fixpunkter for f_α.

2° Bestem de $\alpha \in \mathbb{R}$, for hvilke $f_\alpha \circ f_\alpha \circ f_\alpha = id_{\mathbb{R}^3}$.

3° Bestem de $\alpha \in \mathbb{R}$, for hvilke f_α er en kongruens.

4° Bestem de $\alpha \in \mathbb{R}$, for hvilke f_α er en translation.

(Sættet fortsættes side 3)

Københavns universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973-74.
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

Opgave nr. 3.

Lad $q \in C^0(A)$, hvor A er intervallet $[0,1]$. Man betragter differentialligningen

$$(\mathrm{I}) \qquad u''(x) = q(x)\,u(x) + f(x) \qquad \text{på } A$$

og den tilhørende homogene differentialligning

$$(\mathrm{II}) \qquad u''(x) = q(x)\,u(x) \qquad \text{på } A.$$

Lad $v_1(x)$ og $v_2(x)$ være løsninger til (II), som opfylder henholdsvis $v_1(0) = 0$ og $v_2(1) = 0$, og lad $W(x) = v_1(x)\,v_2'(x) - v_2(x)\,v_1'(x)$ for $x \in A$.

1° Vis, at $W(x)$ er konstant på A.

2° Idet det antages, at $W(0) \neq 0$, skal man vise, at problemet

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} u''(x) = q(x)\,u(x) + f(x) & \text{på } A, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

for hvert $f \in C^0(A)$ har en og kun en løsning, og at denne er bestemt ved

$$(\mathrm{IV}) \qquad u(x) = \int_0^1 G(x,y)\,f(y)\,dy \quad ,$$

(Opgaven fortsættes side 4.)

hvor funktionen $G(x,y)$ er defineret for $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ ved

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{W(0)} v_1(y)\, v_2(x) & \text{for } y \leq x\,, \\ \frac{1}{W(0)} v_1(x)\, v_2(y) & \text{for } y \geq x\,. \end{cases}$$

3° Løs problemet

$$(\mathrm{V}) \qquad \begin{cases} u''(x) = \frac{2}{(x+1)^2}\, u(x) + x + 1 & \text{på } A\,, \\ u(0) = u(1) = 0\,, \end{cases}$$

idet det oplyses, at den homogene ligning

$$(\mathrm{VI}) \qquad u''(x) = \frac{2}{(x+1)^2}\, u(x) \qquad \text{på } A$$

har to lineært uafhængige løsninger af formen $(x+1)^k$, hvor k er hel.

Opgave nr. 4.

I et n-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ er der givet en endomorfi $f : V \to V$, således at

$$f^2 + e = 0,$$

hvor $e : V \to V$ er den identiske afbildning.

(Opgaven fortsættes side 5.)

Københavns universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1973-74.

1° Lad $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ være vektorer i V, således at de $2k$ vektorer

$$\underline{v}_1, f(\underline{v}_1), \dots, \underline{v}_k, f(\underline{v}_k)$$

er lineært uafhængige. Vis, at hvis der for en vektor $v \in V$ gælder

$$\underline{v} \notin \operatorname{Span}\{\underline{v}_1, f(\underline{v}_1), \dots, \underline{v}_k, f(\underline{v}_k)\},$$

så er vektorerne

$$\underline{v}_1, f(\underline{v}_1), \dots, \underline{v}_k, f(\underline{v}_k), \underline{v}, f(\underline{v})$$

lineært uafhængige.

2° Vis, at n er et lige tal. Idet $n = 2m$, ønskes det vist, at f i en passende basis for V beskrives ved en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array} & & & \\ & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix},$$

hvor der uden for de m anførte 2×2-blokke står lutter 0'er.

3° Vis, at matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

opfylder $\underline{\underline{A}}^2 + \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$, og bestem en regulær matrix $\underline{\underline{S}} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ således at

$$\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$