Københavns universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1973.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

Lad a, b, c være givne reelle tal.

1° Vis, at der findes et og kun et talsæt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, således at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & x & y \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er diagonaliserbar.

2° Svarende til det i 1° bestemte talsæt (x, y, z) ønskes angivet en regulær matrix $\underline{\underline{S}} \in M_4(\mathbb{R})$, således at

$$\begin{pmatrix} 1 & a & x & y \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave nr. 2.

Find stamfunktioner på $\mathbb{R}_+$ til funktionerne

(a) $\dfrac{\sinh x}{1 + \cosh x}$, (b) $\dfrac{1 + \cosh x}{\sinh x}$, (c) $\dfrac{1}{\sinh x\,(1 + \cosh x)}$.

(Sættet fortsættes side 2)

Opgave nr. 3.

Bestem Jordans normalform for matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1+3i & 3i & 0 \\ 6 & 5-3i & -2i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Opgave nr. 4.

Lad $[a, b]$ og $[c, d]$ være egentlige intervaller på $\mathbb{R}$, og lad $f : [a, b] \to [c, d]$ være en funktion, der opfylder følgende betingelser:

(i) f er surjektiv.

(ii) $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Vis, at f er kontinuert og har en kontinuert invers.

Opgave nr. 5.

I $\mathbb{R}^2$ med koordinaterne x, y betragtes ellipsen C bestemt ved ligningen

$$C : \quad x^2 + 2y^2 = 6,$$

og ellipseskiven D bestemt ved uligheden

$$D : \quad x^2 + 2y^2 \leqq 6.$$

Betragt funktionen $f_0 = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Bestem billedmængderne $f_0(C)$ og $f_0(D)$, og angiv, hvilke sætninger der benyttes. [Bevis for at forudsætningerne i disse sætninger er opfyldt kræves ikke].

(Sættet fortsættes side 3)

Naturvidenskabelig embedsekskamen sommeren 1973.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

Opgave nr. 6.

Lad f være en C^∞ funktion fra intervallet $]-1,1[$ ind i $\mathbb{C}$, for hvilken der findes en konstant k, således at

$$\sup_{x \in]-1,1[} |f^{(n)}(x)| \leq n!\,k$$

for alle $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Vis, at Taylorrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

har konvergensradius ≥ 1, og at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

for alle $x \in]-1,1[$.