Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1973.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

Lad a og b betegne reelle tal med $a<b$, og lad M betegne mængden af kontinuerte reelle funktioner fra $[a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ med kontinuert differentialkvotient (d.v.s. M er mængden $C^1([a,b],\mathbb{R})$).

Idet x_0 betegner et fast punkt i $[a,b]$, defineres de to afbildninger $dist_0$ og $dist_1$ fra $M\times M$ ind i $\mathbb{R}$ ved

$$dist_0(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

$$dist_1(f,g) = |f(x_0)-g(x_0)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)-g'(x)|.$$

1° Vis, at $dist_0$ og $dist_1$ er metrikker på M. Undersøg, om afbildningen $d: M\times M \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)-g'(x)|$$

er en metrik på M.

2° Vis, at $(M, dist_1)$ er et fuldstændigt metriske rum.

3° Vis, at afbildningen $T: M\to M$ defineret ved

$$Tf = f \quad \text{for alle } f\in M$$

er <u>uniformt kontinuert</u> fra $(M,dist_1)$ ind i $(M,dist_0)$.

4° Vis ved et eksempel, at det metriske rum $(M, dist_0)$ ikke er fuldstændigt.

(Sættet fortsættes side 2)

Opgave nr. 2.

1° I vektorrummet $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ er en kvadratisk form givet ved

$$K_B : (x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \sum_{0 \le i < j \le n} 2 b_{ij} x_i x_j \ , \quad n \geq 1.$$

Vis, at K_B er positiv semidefinit, såfremt

(1) $\quad |b_{ij}| \leq \frac{1}{n} \ , \quad 0 \leq i < j \leq n.$

(Vink: $2|x_i x_j| \leq x_i^2 + x_j^2$).

Vis, at K_B er positiv definit, såfremt

(2) $\quad |b_{ij}| < \frac{1}{n} \ , \quad 0 \leq i < j \leq n.$

Vis, at $\operatorname{ind}_+ K_B \geq n$, såfremt (1) er opfyldt.

2° Lad (A, V) være et n-dimensionalt euklidisk affint rum, og betragt punkter

$$O, P_0, P_1, \ldots, P_n \in A,$$

som opfylder følgende betingelser:

(i) $\quad O \in \operatorname{conv}\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$

(ii) $\quad \underline{e}_i = \underline{OP_i} \ , \ 0 \leq i \leq n$, er enhedsvektorer i V.

Idet u_{ij} $(0 \leq u_{ij} \leq \pi)$ betegner vinklen mellem $\underline{e}_i$ og $\underline{e}_j$, skal man vise, at der findes et (i,j), $0 \leq i < j \leq n$, således at $\cos u_{ij} \leq -\frac{1}{n}$.

(Vink: betragt $(x_0 \underline{e}_0 + \cdots + x_n \underline{e}_n) \cdot (x_0 \underline{e}_0 + \cdots + x_n \underline{e}_n)$).

Opgave nr. 3.

Lad $K = [0,1] \times [0,1]$ betegne enhedskvadratet i $\mathbb{R}^2$ med koordinaterne x, y, og lad $F : K \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion, som opfylder følgende betingelser:

(a) De partielle afledede $\frac{\partial F}{\partial x}$ og $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ eksisterer

(opgaven fortsættes side 3)

og er kontinuerte funktioner på K.

(b) Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ er $\neq 0$ overalt i K.

(c) For alle $u \in [0,1]$ gælder $F(0,u) = F(1,u)$ og $\frac{\partial F}{\partial x}(0,u) = \frac{\partial F}{\partial x}(1,u)$.

For ethvert $u \in [0,1]$ defineres kurven $z_u : [0,1] \to \mathbb{C}$ ved

$$z_u(t) = F(t,u), \quad t \in [0,1].$$

1° Vis, at enhver af disse kurver er en lukket kurve af klasse C^2 med $z_u'(t) \neq 0$ for alle $t \in [0,1]$, og med $z_u'(0) = z_u'(1)$.

Lad nu $\kappa_u(t)$ betegne krumningen af kurven $z_u : [0,1] \to \mathbb{C}$ i kurvepunktet $z_u(t)$, og lad Θ_u betegne tangentdrejningen langs denne kurve fra kurvepunktet $z_u(0)$ til kurvepunktet $z_u(1)$.

2° Vis, at Θ_u er et helt multiplum af 2π.

3° Vis, at Θ_u tilfredsstiller formlen

$$\Theta_u = \int_0^1 \kappa_u(t)\, |z_u'(t)|\, dt.$$

4° Bevis, at funktionen $\Theta : [0,1] \to \mathbb{R}$, defineret ved $\Theta(u) = \Theta_u$ for alle $u \in [0,1]$, er konstant.

5° Undersøg, om funktionen F med de ovenfor beskrevne egenskaber kan vælges således, at $z_0(t) = e^{i2\pi t}$ og $z_1(t) = e^{-i2\pi t}$ for alle $t \in [0,1]$.

Opgave nr. 4.

1° Vis, at polynomiet $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda + 16$ har rødderne $2i$ og $-2i$ samt dobbeltroden 2.

2° Med $(U,\mathbb{C})$ betegnes vektorrummet af funktioner $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, der er løsninger til diffe-

(opgaven fortsættes side 4)

rentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} - 16\frac{dx}{dt} + 16x = 0.$$

Angiv en basis for U.

3° Gør rede for, at der ved $S: \varphi \mapsto \frac{d\varphi}{dt}$ defineres en endomorfi $S: U \to U$, og bestem denne afbildnings matrix m.h.t. den fundne basis for U.

4° For et tal $h \in \mathbb{R}$ og en funktion $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ betegnes med $T_h\varphi$ den ved $t \mapsto \varphi(t+h)$ definerede funktion $T_h\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Gør rede for, at der herved for hvert tal $h \in \mathbb{R}$ defineres en endomorfi $T_h: U \to U$, og bestem denne afbildnings matrix m.h.t. den fundne basis for U.

5° Angiv de par $(h, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, for hvilke der findes en fra 0 forskellig løsning $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ til differentialligningen $(*)$, således at

$$(**) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \alpha T_h \varphi.$$

For hvilke (h, α) findes der et 2-dimensionalt underrum af U bestående af funktioner $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, som tilfredsstiller ligningen $(**)$.