Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1972-73.

MATEMATIK 1.
Skriftlig prøve 2.
Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

[Denne opgave tillægges ved bedømmelsen vægt som tre opgaver.]

Eksistens- og entydighedssætningen for sædvanlige differentialligningssystemer af første orden.

Det væsentlige bør træde klart frem. Enkeltheder medtages i den udstrækning, tiden tillader.

Opgave nr. 2.

I et tredimensionalt vektorrum (V, L) er der givet en basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. En endomorfi $f: V \to V$ er bestemt ved

$$
\begin{aligned}
f(\underline{e}_1) &= -2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - 3\underline{e}_3 \\
f(\underline{e}_2) &= \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \\
f(\underline{e}_3) &= 3\underline{e}_1 - 3\underline{e}_2 + 4\underline{e}_3 .
\end{aligned}
$$

Vis, at f er diagonaliserbar. Bestem en basis for V bestående af egenvektorer for f.

(Sættet fortsættes side 2)

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1972-73.
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

Opgave nr. 3.

Lad $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = xy \exp(-x^2-y^2).$$

Find samtlige stationære punkter for f, og afgør, i hvilke af disse punkter funktionen har lokalt maksimum eller lokalt minimum.

Opgave nr. 4.

I vektorrummet $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ med det sædvanlige indre produkt er en symmetrisk bilinearform B givet ved den tilhørende kvadratiske form

$$K_B(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3)^2 - (x_1-x_2)^2.$$

1°. Bestem matricen $\underline{\underline{B}}$ hørende til B med hensyn til den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$.

2°. Find $\text{ind}_+ K_B$ og $\text{ind}_- K_B$.

3°. Find en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$, i hvilken B beskrives ved en diagonalmatrix.