Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1972-73.

MATEMATIK 1.
Skriftlig prøve 1.
Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;\,j=1,\dots,n} \in M_{m,n}(L)$.
Vi definerer $\underline{\underline{A}}^S = (a^S_{ji})_{j=1,\dots,n;\,i=1,\dots,m} \in M_{n,m}(L)$
ved

$$a^S_{ji} = a_{m+1-i,\,n+1-j} \quad (j=1,\dots,n;\ i=1,\dots,m).$$

For $m=n$ fremgår $\underline{\underline{A}}^S$ altså af $\underline{\underline{A}}$ ved spejling i matricens anden diagonal bestående af de pladser (i,j), for hvilke $i+j = n+1$.
Lad endvidere $\underline{\underline{I}}_n \in M_{n,n}(L)$ være matricen

$$\underline{\underline{I}}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

med 1-er i ovennævnte diagonal og 0-er udenfor.

1° Vis for $\underline{\underline{A}} \in M_{m,n}(L)$, at
$$\underline{\underline{A}}^S = \underline{\underline{I}}_n \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{I}}_m ,$$
hvor $\underline{\underline{A}}'$ er den til $\underline{\underline{A}}$ transponerede matrix.

2° Vis, for $\underline{\underline{A}} \in M_{m,n}(L)$, $\underline{\underline{B}} \in M_{n,p}(L)$, at
$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^S = \underline{\underline{B}}^S \underline{\underline{A}}^S .$$

3° Vis for $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$, at
(i) $(\underline{\underline{A}}^{-1})^S = (\underline{\underline{A}}^S)^{-1}$, når $\underline{\underline{A}}$ er regulær.
(ii) $\det \underline{\underline{A}}^S = \det \underline{\underline{A}}$.

4° Vis, at $H(n,L) = \{\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L) \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^S = \underline{\underline{E}}\}$ er en undergruppe i $GL(n,L)$.

(Opgaven fortsættes side 2)

5° Vis, at $\det \underline{\underline{A}} = \pm 1$, når $\underline{\underline{A}} \in H(n,L)$, og vis, at
$$H^+(n,L) = \{ \underline{\underline{A}} \in H(n,L) \mid \det \underline{\underline{A}} = 1 \}$$
er en undergruppe i $H(n,L)$.

6° Med L^* betegnes gruppen $L \setminus \{0\}$ med multiplikation som komposition. Vis, at
$$\alpha \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$
definerer en isomorfi $L^* \xrightarrow{\sim} H^+(2,L)$.

Opgave nr. 2.

Lad $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion med perioden 2π, om hvis Fourierrække
$$g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$
det gælder, at
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \quad \text{er konvergent.}$$

1° Vis, at den trigonometriske række
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{1+n^2} e^{int}$$
er uniformt konvergent.

2° Vis, at sumfunktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ til denne række er en C^2-funktion, og at den er løsning til differentialligningen
$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = -g(t).$$

3° Vis, at denne differentialligning ikke har andre periodiske løsninger $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ end funktionen φ.

(Sættet fortsætter side 3)

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1972-73.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

Opgave nr. 3.

I et endeligt dimensionalt vektorrum (V, L) er givet en endomorfi $a: V \to V$, som opfylder ligningen $a^3 + a = 0$. Sæt

$$V_0 = \{ \underline{v} \in V \mid a(\underline{v}) = \underline{0} \}$$

$$V_1 = \{ \underline{v} \in V \mid a^2(\underline{v}) = -\underline{v} \}.$$

1° Vis, at $V = V_0 \oplus V_1$ [Vink: Udnyt f.eks. at $e = (a^2 + e) - a^2$, hvor $e: V \to V$ er den identiske afbildning].

2° I vektorrummet $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ med sædvanligt indre produkt betragtes en enhedsvektor $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$. En endomorfi $a: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er m.h.t. den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$ bestemt ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Find det karakteristiske polynomium for a. Vis, at $a^3 + a = 0$. Hvad bliver underrummene V_0 og V_1 i dette tilfælde?

3° For hvert $\alpha \in \mathbb{R}$ betegnes med d_α den endomorfi $d_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hvis matrix er

$$\underline{\underline{D}}_\alpha = \underline{\underline{E}} + (\sin\alpha)\underline{\underline{A}} + (1 - \cos\alpha)\underline{\underline{A}}^2.$$

Vis, at d_α er en ortogonal endomorfi.

4° For hvilke $\alpha \in \mathbb{R}$ er d_α egentlig ortogonal? [Vink: Udnyt f.eks. at afbildningen $\alpha \mapsto \det \underline{\underline{D}}_\alpha$ er kontinuert].

Opgave nr. 4.

1° Find en stamfunktion til

$$\frac{2 + 2x + x^2}{(1 + x^2)(2 + x^2)}.$$

2° Vis, at integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{2 + 2x + x^2}{(1 + x^2)(2 + x^2)}\, dx$$

eksisterer, og find dets værdi.