Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1972.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

[Denne opgave tillægges ved bedømmelsen vægt som to opgaver.]

Formuler og bevis algebraens fundamentalsætning.

Opgave nr. 2.

Lad $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + z^2 - x - y - z.$$

Vis, at f har globalt maksimum og globalt minimum, og find de tilhørende ekstremumsværdier.

(Benyt f. eks., at $f(x,y,z)$ er af formen $g(x,y) + h(z)$.)

Opgave nr. 3.

Ud fra en given talfølge $(a_n \in \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$ og et tal $c \in \,]0,1[$ dannes en talfølge $(b_n \in \mathbb{R}_+ \mid n \in \mathbb{N})$ ved forskriften

$$b_1 = a_1$$
$$b_n = c\,b_{n-1} + a_n \quad \text{for } n > 1.$$

(Opgaven fortsættes side 2)

1° Vis, at hvis der for et tal $k \in \mathbb{R}_+$ gælder $a_n \leqq k$ for alle $n \in \mathbb{N}$, da gælder $b_n < \frac{k}{1-c}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

2° Vis, at hvis der gælder $a_n \to 0$ for $n \to +\infty$, da gælder $b_n \to 0$ for $n \to +\infty$.

Opgave nr. 4.

Lad α være et reelt tal og betragt matricen

$$\underline{\underline{A}}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Den ved $\underline{\underline{x}}_1 \mapsto \underline{\underline{A}}_\alpha \underline{\underline{x}}_1$ bestemte lineære afbildning $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ betegnes f_α.

1° For hvilke $\alpha \in \mathbb{R}$ er f_α surjektiv?

2° Den ved $x_2 = 2x_3$ bestemte hyperplan i $\mathbb{R}^4$ betegnes H. For hvilke $\alpha \in \mathbb{R}$ er f_α's restriktion til H injektiv? Gør rede for, at der for ethvert sådant α findes en og kun en lineær afbildning $g_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, som opfylder, at $g_\alpha(\mathbb{R}^3) \subseteq H$ og $f_\alpha \circ g_\alpha = e$, hvor $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er den identiske afbildning. Angiv matrixligningen for g_α, når $\alpha = 0$.