Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1972.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

1° Givet matricen

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{C}).$$

Find egenværdierne for $\underline{\underline{P}}$ og de tilhørende egenværdimultipliciteter, og vis, at $\underline{\underline{P}}$ er diagonaliserbar.
Bestem en regulær matrix $\underline{\underline{S}} \in M_{4,4}(\mathbb{C})$, for hvilken

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{S}}$$

er en diagonalmatrix.

2° Bestem samtlige løsninger $\underline{y}_1(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ til differentialligningssystemet

$$\frac{d\underline{y}_1}{dt} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{y}_1 .$$

Bestem samtlige løsninger $\underline{x}_1(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ til differentialligningssystemet

$$\frac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{\underline{P}}\,\underline{x}_1 .$$

Opgave nr. 2.

1° Lad $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ være en basis for et reelt vektorrum V, og lad $f : V \to \mathbb{R}$ være en linearform $\neq 0$.

(Opgaven fortsættes side 2)

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1972.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

Betragt den ved $(\underline{u},\underline{v}) \longmapsto f(\underline{u})f(\underline{v})$ definerede symmetriske bilinearform $B: V \times V \to \mathbb{R}$. Angiv B's nulrum, $\operatorname{rg} B$, samt $\operatorname{ind}_+ K_B$ og $\operatorname{ind}_- K_B$, hvor K_B er den til B hørende kvadratiske form. Vis, at den til B hørende matrix m.h.t. den givne basis er

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} f(\underline{e}_1) \\ \vdots \\ f(\underline{e}_n) \end{pmatrix} \left(f(\underline{e}_1) \ \cdots \ f(\underline{e}_n) \right).$$

2° Lad $K: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være den ved $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + x_2 - 2x_3)^2$ bestemte kvadratiske form, og lad B være den hertil hørende symmetriske bilinearform. Angiv matricen hørende til B m.h.t. den kanoniske basis for $\mathbb{R}^3$. Find en basis for $\mathbb{R}^3$, ortonormal ved det sædvanlige indre produkt i $\mathbb{R}^3$, i hvilken B beskrives ved en diagonalmatrix. Angiv denne diagonalmatrix.

Opgave nr. 3.

1° Vis, at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{2}{1 \cdot 3} x^3 + \frac{2^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} x^5 + \frac{2^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} x^7 + \cdots$$

er konvergent for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

2° Vis, at rækkens sumfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 1.$$

3° Vis, at der for ethvert $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

(Opgaven fortsættes side 3)

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1972.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

4° Vis, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder formlen

$$\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{1}{n!\,0!} - \frac{1}{(n-1)!\,1!}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{(n-2)!\,2!}\cdot\frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{0!\,n!}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

Opgave nr. 4.

Lad der være givet r forskellige punkter $P_1, \dots, P_r$ i et euklidisk affint rum (A, V), og sæt

$$P^* = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} P_i .$$

1° Sæt $M = \{P_1, \dots, P_r\}$ og lad $f : A \to A$ være en affin transformation, som opfylder $f(M) = M$. Vis, at P^* er et fixpunkt for f.

2° Lad G være en endelig undergruppe af den affine transformationsgruppe for A. Vis, at transformationerne i G har et fælles fixpunkt.

3° Vis, at der for alle vektorer $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ gælder

$$\|\underline{v} - \underline{w}\|^2 = \|\underline{v} - \underline{u}\|^2 + \|\underline{u} - \underline{w}\|^2 + 2(\underline{v} - \underline{u})\cdot(\underline{u} - \underline{w}),$$

og slut heraf: Er $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{w} \in V$, og sættes $\underline{v}^* = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \underline{v}_i$, da gælder

$$\sum_{i=1}^{r} \|\underline{v}_i - \underline{w}\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|\underline{v}_i - \underline{v}^*\|^2 + r\|\underline{v}^* - \underline{w}\|^2.$$

4° Vis, at der for alle punkter $Q \in A$ gælder

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{dist}(Q, P_i)^2 \geq \sum_{i=1}^{r} \operatorname{dist}(P^*, P_i)^2,$$

og at lighedstegnet kun gælder, når $Q = P^*$.