Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1971-72.

# MATEMATIK 1.

## Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

## Opgave nr. 1.

Lad $(V, L)$ være et vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$.

1° Lad $\underline{v}$ være en vektor i $V$, og lad $U$ være et underrum af $V$, som ikke indeholder vektoren $\underline{v}$.
Vis, at der findes et $(n-1)$-dimensionalt underrum $\tilde{U}$ af $V$, som indeholder $U$, men ikke indeholder $\underline{v}$.

2° Lad $M$ være en ikke-tom delmængde af $V$, og lad $\underline{w}$ være en vektor i $V$.
Vis, at følgende to betingelser er ensbetydende:

(i) Vektoren $\underline{w}$ tilhører det af $M$ frembragte underrum span $M$.

(ii) For enhver linearform $\xi$ på $V$ gælder, at hvis $\xi(\underline{u}) = 0$ for enhver vektor $\underline{u} \in M$, så er også $\xi(\underline{w}) = 0$.

## Opgave nr. 2.

1° Vis, at det uegentlige integral

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x^4 + x^2}$$

eksisterer, og find dets værdi.

(Opgaven fortsættes side 2)

Københavns universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1971-72
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

---

2° Vis, at det uegentlige integral

$$B = \int_1^\infty \frac{dx}{x^3 + x}$$

eksisterer, og find dets værdi.

Opgave nr. 3.

1° Vis (f. eks. ved induktion), at matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n,2n}(\mathbb{R})$$

har det karakteristiske polynomium

$$p_{\underline{\underline{A}}}(t) = (t^2 - a_1 a_{2n})(t^2 - a_2 a_{2n-1}) \cdots (t^2 - a_n a_{n+1}).$$

2° Undersøg om matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er diagonaliserbar inden for $M_{4,4}(\mathbb{R})$.

(Sættet fortsættes side 3)

Københavns universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1971-72
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

## Opgave nr. 4.

1° Vis, at hvis $\mathcal{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er uniformt kontinuert og $(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ og $(g_n \mid n \in \mathbb{N})$ er uniformt konvergente følger af reelle funktioner på et interval $A \subseteq \mathbb{R}$, da er følgen $(h_n \mid n \in \mathbb{N})$, hvor $h_n$ er den ved

$$h_n(t) = \mathcal{F}(f_n(t), g_n(t))$$

bestemte reelle funktion på $A$, ligeledes uniformt konvergent.

2° Vis, at udsagnet bliver falskt, hvis $\mathcal{F}$ kun forudsættes kontinuert. [Benyt f. eks. $\mathcal{F}(x,y) = xy$.]

## Opgave nr. 5.

Gør rede for, at der findes en omegn $\Xi$ af $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ og en omegn $H$ af $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, således at der for hvert $(x_1, x_2) \in \Xi$ findes netop ét $(y_1, y_2) \in H$, således at

$$x_1 + y_1 - \cos y_1 \cdot \cos y_2 = 0,$$
$$\log(x_1 x_2) + 2x_1(1+y_1)y_2 = 0.$$

Gør endvidere rede for, at den herved bestemte afbildning

$$(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)) : \Xi \to H$$

er af klasse $C^\infty$, og bestem $\dfrac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)}$ i punktet $(1,1)$.

(Sættet fortsættes side 4)

Opgave nr. 6.

1° Lad $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion, for hvilken $f(0) = 0$ og $f'(0) \neq 0$. Find mængden af de tal $\alpha \in \mathbb{R}_+$, for hvilke rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

er konvergent.

2° Angiv en kontinuert funktion $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ med $g(0) = 0$, for hvilken rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

er divergent.