Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1971-72.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

1° Bestem de C^1-funktioner $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for hvilke differentialformen

$$[2x + y\varphi(y)]\,dx + [3y^2 + 2x(\varphi(y) + y^3)]\,dy$$

er eksakt.

2° Bestem for hver af de fundne funktioner φ en stamfunktion til differentialformen.

Opgave nr. 2.

Givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

1° Hvad kan man sige om $\underline{\underline{A}}$'s karakteristiske rødder på grundlag af, at

a) $\underline{\underline{A}}$ er symmetrisk,

b) $\underline{\underline{A}}$ er ortogonal,

c) $\operatorname{tr} \underline{\underline{A}} = 1$.

Angiv $\underline{\underline{A}}$'s karakteristiske rødder og de tilhørende rodmultipliciteter, og bestem $\det \underline{\underline{A}}$.

(Opgaven fortsættes side 2)

Københavns universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1971-72
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

2° Bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}} \in O_3(\mathbb{R})$, således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

3° Beskriv geometrisk en endomorfi af et 3-dimensionalt euklidisk rum, som m.h.t. en ortonormal basis har afbildningsmatricen $\underline{\underline{A}}$.

Opgave nr. 3.

1° Idet $a \in]0,1[$, betragtes den ved

$$f(t) = \operatorname{Arccos}(a \cosh t)$$

definerede funktion på intervallet

$$J = \{ t \in \mathbb{R} \mid a \cosh t < 1 \}.$$

Vis, at funktionen er konkav.

2° Vis, at billedet af mængden $\{ t + i f(t) \mid t \in J \}$ ved afbildningen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er halvcirklen

$$\{ z = x + iy \mid (x - \tfrac{1}{a})^2 + y^2 = \tfrac{1}{a^2} - 1 ,\ y > 0 \}.$$

Opgave nr. 4.

Lad $(V, \mathbb{R})$ være et n-dimensionalt euklidisk rum, og lad f være en endomorfi af V.

1° For $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{o}\}$ sættes

$$\varphi(\underline{v}) = \frac{\underline{v} \cdot f(\underline{v})}{\underline{v} \cdot \underline{v}}.$$

Vis, at hvis $\underline{v}$ er en egenvektor for f, så er den tilhørende egenværdi lig med $\varphi(\underline{v})$.

(Opgaven fortsættes side 3)

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1971-72

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

2° Vis, at afbildningen $\varphi : V \setminus \{\underline{o}\} \to \mathbb{R}$ har en mindste værdi. [Vælg f. eks. en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n)$ for V, sæt $\psi(x_1, \cdots, x_n) = \varphi(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n)$ for $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$, gør rede for, at $\psi : \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\} \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og begrund, at ψ har en mindste værdi på mængden S af de punkter $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ for hvilke $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = 1$.)

3° Lad $\underline{u}$ være en vektor i $V \setminus \{\underline{o}\}$, således at φ's mindste værdi antages i $\underline{u}$. Lad $\underline{v}$ være en vilkårlig vektor i V. For hvert $t \in \mathbb{R}$ med $\underline{u} + t\underline{v} \neq \underline{o}$ sættes

$$\tau_{\underline{v}}(t) = \varphi(\underline{u} + t\underline{v}).$$

Gør rede for, at $\tau_{\underline{v}}$ er differentiabel i ethvert punkt t af sin definitionsmængde. Gør rede for, at $t = 0$ tilhører definitionsmængden, og begrund, at $\tau_{\underline{v}}'(0) = 0$.

Vis, at

$$\tau_{\underline{v}}'(0) = \frac{1}{\underline{u} \cdot \underline{u}} \left(\underline{v} \cdot f(\underline{u}) + \underline{u} \cdot f(\underline{v}) - 2\varphi(\underline{u})(\underline{v} \cdot \underline{u}) \right).$$

4° Vis ved benyttelse af 3°, at hvis f er selvadjungeret, så er $\underline{u}$ en egenvektor for f.