Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1971-72.

MATEMATIK 1.
Skriftlig prøve 1.
Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

1° Bestem de $C^1$-funktioner $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for hvilke differentialformen

$$[2x + y \varphi(y)] \, dx + [3 y^2 + 2x(\varphi(y) + y^3)] \, dy$$

er eksakt.

2° Bestem for hvem af de fundne funktioner $\varphi$ en stamfunktion til differentialformen.

Opgave nr. 2.

Givet matricen

$$A = \begin{pmatrix}
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\
\frac{3}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\
\frac{3}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

1° Hvad kan man sige om $A$'s karakteristiske rødder

på grundlag af, at

a) $A$ er symmetrisk,

b) $A$ er ortogonal,

c) $\text{tr} \, A = 1$.

Angiv $A$'s karakteristiske rødder og de tilhørende rodmultipliciteter, og bestem det $A$.

(Opgaven fortsættes side 2)
2° Bestem en ortogonal matrix $S \in O_3(\mathbb{R})$, således at
$SA$ $S^{-1}$ er en diagonalmatrix.

3° Beskriv geometrisk en endomorfi af et 3-dimensional
euklidisk rum, som m.h.t. enortonormal basis har
avbildningsmatricen $A$.

Opgave nr. 3.

1° Indet $a \in ]0,1[$, betragtes den ved
$f(t) = \arccos (a \cosh t)$
definerede funktion på intervallet $J = \{ t \in \mathbb{R} \mid a \cosh t < 1 \}$.

Vis, at funktionen er konkav.

2° Vis, at billedet af mængden $\{ t + i f(t) \mid t \in J \}$
ved afbildningen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er halvcirklen
$\{ z = x + iy \mid (x - \frac{1}{a})^2 + y^2 = \frac{1}{a^2} - 1, y > 0 \}$.

Opgave nr. 4.

Lad $(V, \mathbb{R})$ være et $n$-dimensionalt euklidisk rum,
og lad $f$ være en endomorfi af $V$.

1° For $v \in V \setminus \{0\}$ sættes
$\phi(v) = \frac{v \cdot f(v)}{v \cdot v}$.

Vis, at hvis $v$ er en egenvektor for $f$, så er den
tilhørende egenværdi lig med $\phi(v)$.

(Opgaven fortsættes side 3)
2. Vis, at afbildningen \( q : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \)
har en mindste værdi. (Vog f. eks. en ortonormal
basis \((e_1, \ldots, e_n)\) for \(V\), så er \( \gamma(x_1, \ldots, x_m) \)
\( = q(x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m) \) for \((x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\),
gør rede for, at \( \gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \) \( \rightarrow \mathbb{R} \), er
kontinuerligt, og begrund, at \( \gamma \) har en mindste værdi
på mångden \( S \) af de punkter \((x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^n \)
for hvilke \( \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} = 1 \).)

3. Lad \( u \) være en vektor i \( V \setminus \{0\} \), således at
\( q \)'s mindste værdi anuges i \( u \). Lad \( v \) være en
vilkårlig vektor i \( V \). For hvert \( t \in \mathbb{R} \) med
\( u + tv \neq 0 \) sættes
\[ T_v(t) = q(u + tv). \]
Gør rede for, at \( T_v \) er differentiabel i ethvert
punkt \( t \) af sin definitionsmængde. Gør rede for,
at \( t = 0 \) tilhører definitionsmængden, og begrund,
at \( T_v'(0) = 0 \).

Vis, at
\[ T_v'(0) = \frac{1}{u \cdot u} \left( v \cdot f(u) + u \cdot f(v) - 2 \phi(u)(v, u) \right). \]

4. Vis ved benyttelse af 3.°, at hvis \( f \) er selvadjungeret,
så er \( u \) en egenvektor for \( f \).