Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1971.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

(a) Vis, at der for enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ findes et tal $\rho \in [0,+\infty]$, rækkens konvergensradius, med den egenskab, at potensrækken er absolut konvergent i ethvert punkt $x \in \mathbb{C}$, for hvilket $|x| < \rho$, og divergent i ethvert punkt $x \in \mathbb{C}$, for hvilket $|x| > \rho$.

(b) Nævn et eksempel på en potensrække med konvergensradius 1, som er divergent i ethvert punkt $x \in \mathbb{C}$, for hvilket $|x| = 1$.

Opgave nr. 2.

Bestem mængden af de $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} \alpha x \;+ \qquad\quad 2z &= 2 \\ 5x + 2y \qquad\quad &= 1 \\ x - 2y + \beta z &= -3 \end{aligned}$$

har mindst en løsning $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, og angiv for hvert sådant (α,β) dimensionen af løsningsrummet. (Der kræves ikke angivelse af løsningsrummet.)

(Sættet fortsættes side 2,3 og 4.)

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1971.
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

— o —

Opgave nr. 3.

Lad M være en ikke tom mængde, og lad

$$dist_1 : M \times M \to \mathbb{R} \quad \text{og} \quad dist_2 : M \times M \to \mathbb{R}$$

være metriker i M. Det antages, at der for vilkårlige $x, y \in M$ gælder

$$dist_1(x,y) \leq dist_2(x,y).$$

Lad A være en delmængde af M.

(a) Vis, at hvis A er åben i $(M, dist_1)$, er A også åben i $(M, dist_2)$.

(b) Vis, at hvis A er afsluttet i $(M, dist_1)$, er A også afsluttet i $(M, dist_2)$.

(c) Vis, at hvis A er kompakt i $(M, dist_2)$, er A også kompakt i $(M, dist_1)$.

Opgave nr. 4.

Givet funktionen

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = y + \frac{1}{\pi} x \cos y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Gør rede for, at f har en største værdi på mængden $A = [0,\pi] \times [0,\pi]$. Vis, at f ikke har en største værdi på A's indre. Bestem f's største værdi på A.

(Sættet fortsættes side 3 og 4.)

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1971.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

— • —

Opgave nr. 5.

(a) Undersøg, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[5]{n+1} + \sqrt[5]{n})\log n}{n^2}$$

er konvergent.

(b) Undersøg, om den ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{Arctan} x} & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

definerede funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel.

Opgave nr. 6.

Givet funktionen

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = xy + \cos x \sin y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Gør rede for, at der findes $a, b \in \mathbb{R}_+$, således at mængden af de punkter $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, som tilhører $[-a,a] \times [\pi-b, \pi+b]$, og som tilfredsstiller ligningen $f(x,y) = 0$, netop er grafen for en $\mathscr{C}^\infty$-funktion $g : [-a,a] \to [\pi-b, \pi+b]$.

(Opgaven fortsættes side 4.)

Københavns universitet. Side 4.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1971.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

— o —

Udregn $g'(0)$ og $g''(0)$. Bestem et polynomium $p(x)$ af 2. grad, således at $g(x) - p(x) = \varepsilon(x)\, x^2$ for $x \in [-a, a]$, hvor $\varepsilon(x) \to 0$ for $x \to 0$.