Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1971.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

En endomorfi h af et euklidisk vektorrum siges at være <u>positiv definit</u>, dersom h er selvadjungeret og alle h's egenværdier er positive.

1° Gør rede for, at hvis f er en positiv definit endomorfi af et euklidisk vektorrum V, så findes en positiv definit endomorfi g af V, således at $g^2 = f$.

2° Lad V være et 3-dimensionalt euklidisk vektorrum, og lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en ortonormal basis for V. Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

være den til en endomorfi f af V hørende matrix m.h.t. den givne basis. Vis, at f er positiv definit. Bestem den til g hørende matrix $\underline{\underline{B}}$ m.h.t. den givne basis, idet g er en positiv definit endomorfi af V, for hvilken $g^2 = f$.

(Sættet fortsættes side 2.)

Opgave nr. 2.

Man betragter de to polynomier

$$P^+(\lambda) = \lambda^2 - (2i+2)\lambda + 2i$$
$$P^-(\lambda) = \lambda^2 - (2i-2)\lambda - 2i$$

og de tre differentialligninger

$$(1) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} - 4i\frac{d^3x}{dt^3} - 8\frac{d^2x}{dt^2} + 8i\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

$$(2^+) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - (2i+2)\frac{dx}{dt} + 2ix = 0$$

$$(2^-) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - (2i-2)\frac{dx}{dt} - 2ix = 0.$$

(a) Dan polynomiet $P(\lambda) = P^+(\lambda)\,P^-(\lambda)$.

(b) Idet $C^\infty(\mathbb{R})$ betegner mængden af C^∞-funktioner $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, betegnes delmængderne af $C^\infty(\mathbb{R})$ bestående af løsningerne til (1), (2^+) og (2^-) ved henholdsvis S, S^+ og S^-. Gør rede for, at S, S^+ og S^- er vektorrum over $\mathbb{C}$, og angiv deres dimensioner.

(c) Vis, at S er den direkte sum af S^+ og S^-:

$$S = S^+ \oplus S^-.$$

(d) Med S_0 betegnes mængden

$$S_0 = \{\varphi \in S \mid \varphi(t) \to 0 \text{ for } t \to +\infty\}.$$

Vis, at

$$S_0 = S^-.$$

(Opgaven fortsættes side 3.)

(e) Vis, at følgende problem har en og kun een løsning:

For givne komplekse tal c_0 og c_1 søges en C^∞-funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, der opfylder

(i) φ er løsning til (1),

(ii) $\varphi(0) = c_0$ og $\varphi'(0) = c_1$,

(iii) $\varphi(t) \to 0$ for $t \to +\infty$.

Opgave nr. 3.

Lad $B : V \times V \to \mathbb{R}$ være en symmetrisk bilinearform på et n-dimensionalt reelt vektorrum V. For hvert underrum U af V betegnes med B_U restriktionen af B til $U \times U$.

1° Lad U være et m-dimensionalt underrum af V. Gør rede for, at

(a) $\quad ind_+ K_{B_U} \leqq ind_+ K_B$,

(b) $\quad ind_- K_{B_U} \leqq ind_- K_B$,

og bevis, at

(c) $\quad ind_+ K_B - (n-m) \leqq ind_+ K_{B_U}$

(d) $\quad ind_- K_B - (n-m) \leqq ind_- K_{B_U}$.

Vis derefter, at

(e) $\quad \dim N_{B_U} \leqq \dim N_B + (n-m)$.

(Opgaven fortsættes side 4.)

2° Antag, at n er lige, og sæt $p = \frac{n}{2}$.
Lad $(\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n)$ være en basis for V, og lad B være den symmetriske bilinearform på V, hvortil der m. h. t. den givne basis hører matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{E}}_{p,p} & \underline{\underline{O}}_{p,p} \\ \underline{\underline{O}}_{p,p} & -\underline{\underline{E}}_{p,p} \end{pmatrix}.$$

Vis, at hvis U er et underrum af V, for hvilket K_{B_U} er nulformen på U, så gælder $\dim U \leqq p$.
Vis, at der for det p-dimensionale underrum

$$W = \operatorname{span}\{ \underline{e}_i + \underline{e}_{p+i} \mid i = 1, \cdots, p\}$$

gælder, at K_{B_W} er nulformen på W.

Opgave nr. 4.

Lad $F(x,y,p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være en C^2-funktion, lad (a_1, b_1) og (a_2, b_2) være punkter i (x,y)-planen med $a_1 < a_2$, og lad M betegne mangden af C^2-funktioner $y = f(x) : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$, for hvilke $f(a_1) = b_1$ og $f(a_2) = b_2$. For $f \in M$ sættes

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x), f'(x))\, dx.$$

(Opgaven fortsættes side 5.)

Man betragter variationsproblemet: At bestemme $f \in M$ således, at I har lokalt ekstremum for f.

Bevis følgende sætning:

Hvis F for ethvert $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$ opfylder

$$F''_{pp}(x, y, p) > 0$$

og

$$F''_{yy}(x, y, p)\, F''_{pp}(x, y, p) - \left(F''_{yp}(x, y, p)\right)^2 > 0,$$

og $f \in M$ er en løsning til Eulers differentialligning

$$F'_y(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F'_p(x, f(x), f'(x)) = 0,$$

da gælder $I(f_1) > I(f)$ for ethvert $f_1 \in M \setminus \{f\}$.

Vink. Sæt $f_1 - f = g$, betragt $\varphi(\varepsilon) = I(f + \varepsilon g)$, og dan $\varphi''(\varepsilon)$ uden omskrivning ved delvis integration (gør rede for, at φ er to gange differentiabel).