Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1970-71.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

Formuler og bevis Borels overdækningssætning.

Opgave nr. 2.

1° Bestem mængden af de $a \in \mathbb{R}$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} (a-1)x + y + az &= 2 \\ -x + ay + az &= 2a \\ (a+2)x + y + z &= a+1 \end{aligned}$$

har mindst een løsning $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Bestem for hvert sådant $a \in \mathbb{R}$ dimensionen af løsningsrummet. (Ligningssystemet kræves ikke løst.)

2° Gennemfør det samme som under 1° for ligningssystemet

$$\begin{aligned} (a-1)x + y + az &= 2 \\ -x + ay + az &= 2a \end{aligned}$$

(Opgaven fortsættes side 2.)

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1970-71.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

3° Bestem mengden af de $a \in \mathbb{R}$ for hvilke de to ligningssystemer har samme løsningsrum. (Ligningssystemerne kræves ikke løst.)

Opgave nr. 3.

Undersøg for hver af følgende uendelige rækker, om den er konvergent eller divergent:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$.

Opgave nr. 4.

Lad V være et euklidisk vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad f være en automorfi (d.v.s. bijektiv endomorfi) af V.

1° Vis, at $f^* \circ f$ er selvadjungeret. Begrund, at der findes en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n)$ for V bestående af egenvektorer for $f^* \circ f$.

2° Lad λ_i for $i = 1, \cdots, n$ være bestemt ved, at $(f^* \circ f)(\underline{e}_i) = \lambda_i \underline{e}_i$. Vis, at $\lambda_i > 0$ for $i = 1, \cdots, n$. (Betragt f.eks. $\lambda_i \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i$.)

(Opgaven fortsættes side 3.)

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1970-71.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

3° Ved $g(\underline{e}_i) = \sqrt{\lambda_i}\,\underline{e}_i$, $i = 1, \cdots, n$, bestemmes en endomorfi g af V. Gør rede for, at $g^2 = f^* \circ f$, begrund, at g er en automorfi, og begrund, at både g og g^{-1} er selvadjungerede.

4° Sæt $h = f \circ g^{-1}$. Vis, at h er en ortogonal endomorfi af V.

5° Af det foregående fremgår, at der til den givne automorfi f findes en selvadjungeret automorfi g og en ortogonal endomorfi h, således at $f = h \circ g$. Fortolk dette som en sætning om matricer.