Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1970-71.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

Skitser graferne af funktionerne

$$\frac{1}{\cosh x}, \qquad \frac{1}{\cosh^2 x}, \qquad \frac{1}{\cosh^3 x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

og find

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^2 x}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^3 x}.$$

Opgave nr. 2.

Lad V være et vektorrum over $\mathbb{C}$ af dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ være en basis for V. For hver permutation $p \in S_n$ betegnes med f_p den entydigt bestemte endomorfi af V for hvilken $f_p(\underline{e}_i) = \underline{e}_{p(i)}$, $i = 1, \dots, n$.

(Opgaven fortsættes side 2.)

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1970-71.

MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

1° Lad $d \in S_n$ være n-cyklen $(1\,2 \cdots n)$. Angiv den til f_d hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. den givne basis. Vis, at de n'te enhedsrødder $e^{s\frac{2\pi i}{n}}$, $s = 0, 1, \cdots, n-1$, er egenværdier for f_d. Begrund, at f_d er diagonaliserbar.

2° Lad $c = (i_1\, i_2 \cdots i_n) \in S_n$ være en vilkårlig n-cykel. Vis, at f_c har samme egenværdier som f_d, og begrund, at f_c er diagonaliserbar.

3° Vis, at for en vilkårlig permutation $p \in S_n$ er f_p diagonaliserbar. (Udnyt f.eks., at p som bekendt har en fremstilling $p = c_r \circ \cdots \circ c_1$, hvor $c_1, \cdots, c_r$ er cykler, som er disjunkte i følgende forstand: For $c_k = (k_1 \cdots k_\mu)$, $c_l = (l_1 \cdots l_\nu)$ og $k \neq l$ gælder $\{k_1, \cdots, k_\mu\} \cap \{l_1, \cdots, l_\nu\} = \emptyset$.)

(Sættet fortsættes side 3.)

Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1970-71.
MATEMATIK 1 Skriftlig prøve 1.

Opgave nr. 3.

1° Idet $a_1, \cdots, a_n$ og $b_1, \cdots, b_n$ er givne reelle tal, skal man vise, at den ved

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{(1-t)a_j + t b_j}$$

definerede funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er logaritmisk konveks.

2° Gør rede for, at der heraf for $t \in [0,1]$ følger

$$f(t) \leq f(0)^{1-t} \cdot f(1)^{t}.$$

3° Vis herved, at der, når $x_1, \cdots, x_n$ og $y_1, \cdots, y_n$ er givne positive tal, og p og q er to tal i $]1, +\infty[$, for hvilke $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, gælder uligheden

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Sættet fortsættes side 4.)

Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1970-71.
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 1.

Opgave nr. 4.

Vis, at funktionen $f(x,y) = x^3 + 2xy + 5y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, har netop eet lokalt ekstremumspunkt (x_0, y_0), bestem (x_0, y_0), afgør om der er lokalt maksimum eller lokalt minimum i (x_0, y_0), og afgør, om der endda er globalt ekstremum i (x_0, y_0).