Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1970.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

Gengiv beviset for følgende sætning:
Lad der i et n-dimensionalt vektorrum (V, L) være givet en basis $(\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n)$, og lad $k \in L$. Der findes da en og kun een alternerende n-linearform ϕ på (V, L) med $\phi(\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n) = k$. For $(\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n) = (\underline{e}_1 \cdots \underline{e}_n)\underline{A}$ gælder $\phi(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n) = k \det \underline{A}$.

(I beviset kan benyttes andre kendte sætninger om alternerende n-linearformer.)

Opgave nr. 2.

Lad ϕ være en ikke-triviel alternerende n-linearform på et n-dimensionalt vektorrum (V, L), og lad f være en endomorfi af (V, L). Lad ϕ_f være den ved

$$(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n) \mapsto \phi_f(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n) = \phi(f(\underline{v}_1), \cdots, f(\underline{v}_n))$$

definerede afbildning af V^n ind i L. Gør rede for, at der findes en og kun een skalar $D(f) \in L$, således at

$$\phi_f(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n) = D(f)\,\phi(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n)$$

for alle $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n \in V$. Bestem $D(f)$.

(Sættet fortsættes side 2 og 3.)

Opgave nr. 3.

Vis, at en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel med kontinuert afledet, hvis og kun hvis der findes en kontinuert funktion $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, således at

$$(x-y)\,F(x,y) = f(x) - f(y) \quad \text{for ethvert } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Opgave nr. 4.

(a) Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x+n^2)\,n}$$

er uniformt konvergent på ethvert interval $[0,a]$, hvor $a \in \mathbb{R}_+$.

(b) Vis, at rækkens sumfunktion $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ er monotont voksende, og at dens værdimængde er $[0,+\infty[$.

Opgave nr. 5.

(a) Find dekompositionen af $\dfrac{2}{(x+1)(x^2+1)}$ i $\mathbb{R}(x)$.

(b) Find $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2}{(t+1)(t^2+1)}\,dt$ for $x > -1$.

(c) Vis, at $F(x)$ har en grænseværdi for $x \to +\infty$, og find denne.

(Sættet fortsættes side 3.)

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1970.
MATEMATIK 1. Skriftlig prøve 2.

Opgave nr. 6.

Givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 2a & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

hvor a og b er vilkårlige reelle tal.

1° Bestem mængden M af de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ for hvilke $\underline{\underline{A}}$ er regulær, og angiv for hvert $(a,b) \in M$ den inverse matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

2° Lad $(V, \mathbb{R})$ være et vektorrum af dimension 3, og lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en basis for V. For hvert $(a,b) \in M$ bestemmes da ved

$$(\hat{\underline{e}}_1 \; \hat{\underline{e}}_2 \; \hat{\underline{e}}_3) = (\underline{e}_1 \; \underline{e}_2 \; \underline{e}_3)\, \underline{\underline{A}}^{-1}$$

en ny basis $(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$ for V. Angiv for hvert $(a,b) \in M$ mængden af de vektorer $\underline{v} \in V$, der har samme koordinatsæt med hensyn til basen $(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$ som med hensyn til basen $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.