Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1970.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

En matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ siges at være **idempotent**, dersom $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}$.

1° Vis, at en matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ er idempotent, hvis og kun hvis den er regulær-ækvivalent med en diagonalmatrix, som i diagonalen kun har 1'er og 0'er.

2° Bestem antallet af ækvivalensklasser i $M_{n,n}(L)$ [ved relationen „regulær-ækvivalens"], som består af idempotente matricer.

Opgave nr. 2.

(a) Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos ny}{n}$$

er konvergent i ethvert punkt af mængden $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$.

(b) Vis, at sumfunktionen $f: M \to \mathbb{R}$ er en C^1-funktion på M.

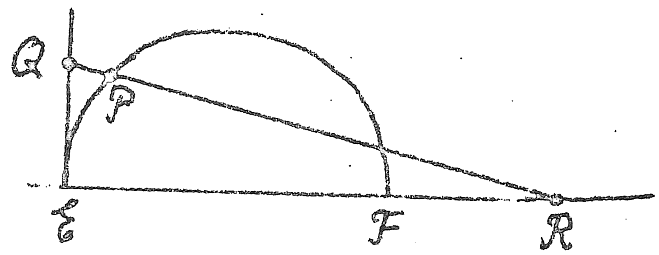
(c) Find f'_x og f'_y udtrykt ved de sædvanlige funktionstegn.

(d) Find f udtrykt ved de sædvanlige funktionstegn.

(Sættet fortsættes side 2.)

Opgave nr. 3.

På en halvcirkel EF vælges et punkt P, og man bestemmer punktet Q på halvtangenten i E således, at liniestykket EQ har samme længde som cirkelbuen EP. Lad R være skæringspunktet mellem linierne EF og PQ. Vis, at R konvergerer mod et vist punkt af linien EF, når P konvergerer mod E, og find dette punkt.



Opgave nr. 4.

(a) Opstil Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\cosh y}\, dx .$$

(b) Vis, at en funktion $y = f(x)$ er løsning til differentialligningen, hvis og kun hvis funktionen $z = \sinh f(x)$ er løsning til differentialligningen

$$z'' + z = 0.$$

(c) Vis herved, at de maksimale løsninger til differentialligningen er funktionerne

$$y = \log\left(\alpha \cos(x-\beta) + \sqrt{1+\alpha^2\cos^2(x-\beta)}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}.$$