Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1969-70.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

Udled Taylors formel med Lagranges restled.

Opgave nr. 2.

Givet matricerne

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1° Undersøg for hvilke $i \in \{1,2,3,4\}$ der findes en regulær matrix $\underline{\underline{S}} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}_i\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

2° Undersøg for hvilke $i \in \{1,2,3,4\}$ der findes en regulær matrix $\underline{\underline{S}} \in M_{3,3}(\mathbb{C})$, således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}_i\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

Opgave nr. 3.

En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvis led er reelle, monotont voksende funktioner på et afsluttet interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$, antages punktvis konvergent på $[a,b]$. Vis, at rækken er uniformt konvergent på $[a,b]$.

Opgave nr. 4.

Find samtlige reelle løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\,\frac{dx}{dt} + 2x = 11 \cos t + 3 \sin t\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vis, at der blandt løsningerne er en og kun een begrænset funktion.