Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedsekamen vinteren 1969-70

M A T E M A T I K 1

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

Opgave nr. 1.

Lad $(M_{n,n}(L),L)$ betegne vektorrummet af alle $(n\times n)$-matricer med elementer fra L.

1° Vis, at afbildningen $\underline{\underline{A}} \mapsto \operatorname{tr} \underline{\underline{A}}$ af $M_{n,n}(L)$ ind i L er en linearform på $(M_{n,n}(L),L)$. (Ved $\operatorname{tr} \underline{\underline{A}}$ forstås som bekendt summen af $\underline{\underline{A}}$'s diagonalelementer. Ved en linearform på et vektorrum (V,L) forstås som bekendt en lineær afbildning af (V,L) ind i (L,L).)

2° Lad f være en linearform på $(M_{n,n}(L),L)$. Vis, at der findes en og kun een matrix $\underline{\underline{Q}} \in M_{n,n}(L)$, således at $f(\underline{\underline{A}}) = \operatorname{tr} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{Q}}$ for alle $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$.

Opgave nr. 2.

For hvert $k \in \mathbb{N}$ betragtes de ved

$$f_{2k-1}(x) = (x-1)^k \quad \text{og} \quad f_{2k}(x) = \frac{k}{x^{k+1}}$$

bestemte funktioner $f_{2k-1}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ og $f_{2k}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$

1° Bestem mængden $A \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ af de x, for hvilke den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = (x-1) + \frac{1}{x^2} + (x-1)^2 + \frac{2}{x^3} + \dots$$

er konvergent.

(Opgaven fortsættes)

2° Vis, at sumfunktionen $F: A \to \mathbb{C}$ er restriktion af en rational funktion, og angiv denne på dekomponeret form.

3° Vis, at rækken er uniformt konvergent på enhver kompakt delmængde af A.

Opgave nr. 3.

Lad A være et 3-dimensionalt reelt affint rum, og lad der i A være valgt et affint koordinatsystem. Lad P_i og Q_i, $i = 0,1,2,3,4$, være punkter i A med koordinatsæt som følger:

P_0: (1,0,0) P_1: (1,1,0) P_2: (1,0,1) P_3: (0,1,1) P_4: (1,1,1)

Q_0: (0,0,1) Q_1: (2,0,1) Q_2: (2,0,1) Q_3: (0,0,3) Q_4: (4,0,1).

Vis, at der findes en og kun een affin afbildning $f: A \to A$ med $f(P_i) = Q_i$ for $i = 0,1,2,3,4$. Angiv matrixligningen for f. Angiv en parameterfremstilling for $f(A)$. Bestem mængden af fixpunkter.

Opgave nr. 4.

Vis, at for hvert $x \in \mathbb{R}$ bestemmes der ved

$$y \mapsto F(x,y) = \exp(x+y) + y$$

en strengt voksende funktion på $\mathbb{R}$. Vis, at der for hvert $x \in \mathbb{R}$ findes et og kun eet $y \in \mathbb{R}$, således at

$$F(x,y) = 0.$$

Dette y betegnes $\varphi(x)$. Vis, at funktionen $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel. Vis, at funktionen $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er aftagende.
Vis endelig, at der for ethvert $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$-\exp x < \varphi(x) < 0.$$