Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1969.

MATEMATIK 1.

GL. ORDNING

Skriftlig prøve 2, matematisk analyse.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Besvarelsen betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

Ulæselige eller uforståelige afsnit af besvarelsen vil ikke blive talt med ved bedømmelsen.

Opgave nr. 1.

Find alle komplekse løsninger til ligningen

$$\cos z = \cosh z.$$

Opgave nr. 2.

Vis, at den ved

$$f(x) = x^{(x^x)}$$

definerede funktion $f:]0,\infty[\to]0,\infty[$ er strengt voksende.

Opgave nr. 3.

Lad a og b, hvor $a < b$, være reelle tal. To talfølger (a_n) og (b_n) defineres ved

$$a_1 = a \quad , \quad b_1 = b \ ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_{n+1} = \frac{1}{5}(4a_n + b_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \ .$$

Vis, at talfølgen $(b_n - a_n)$ er konvergent med grænseværdien 0.

Vis, at talfølgerne (a_n) og (b_n) konvergerer mod en fælles grænseværdi og bestem denne.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet

Mat.1, skr.prøve 2, sommeren 1969.

$P_0:(1,1,0,0) \qquad P_1:(2,0,3,0) \qquad P_2:(3,1,-1,-1)$

$P_3:(0,0,1,0) \qquad P_4:(2,0,0,-1)$

1° Vis, at $A_1 = \text{aff}\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\}$ er en hyperplan.

2° Find en ligning for A_1.

3° Lad A_2 være hyperplanen med ligningen

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1.$$

Begrund, at $A_1 \cap A_2$ er et affint underrum, og angiv en parameterfremstilling for det.

Opgave nr. 4.

Vis, at der for $-\pi \leqq x \leqq \pi$ gælder

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} .$$