Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1969.

M A T E M A T I K 1

GL. ORDNING

Skriftlig prøve 1, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, dersom fire af nedenstående fem opgaver er korrekt besvarede. Alle (helt eller delvis) besvarede opgaver medtages i bedømmelsen.

Opgave nr. 1.

Lad som sædvanlig S_4 betegne gruppen af permutationer af mængden $\{1,2,3,4\}$. Sæt

$$T = \{p \in S_4 \mid p(\{1,2\}) = \{1,2\}\}.$$

1° Gør rede for, at T er en undergruppe af S_4. Angiv T's orden og index.

2° Vis, at to permutationer $p,q \in S_4$ tilhører samme venstre sideklasse til T, hvis og kun hvis $p(\{1,2\}) = q(\{1,2\})$.

3° Angiv en (til betingelsen i 2° analog) nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at to permutationer $p,q \in S_4$ tilhører samme højre sideklasse til T.

4° Undersøg, om T er en normal undergruppe.

Opgave nr. 2.

Bestem mængden af de $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} ax + y + z &= b \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

har (mindst) en løsning $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, og bestem for hvert sådant (a,b) den fuldstændige løsning.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3.

Lad $(V,+,L)$ være et vektorrum af dimension $n \in \mathring{N}$. Lad f og g være linearformer på V, d.v.s. lineære afbildninger af $(V,+,L)$ ind i $(L,+,L)$. Vis, at f og g har samme kerne, hvis og kun hvis der findes en skalar $\lambda \in L \setminus \{0\}$, således at $f = \lambda g$.

Opgave nr. 4.

Lad $(V,+,\mathring{R},\cdot)$ være et euklidisk vektorrum med $\dim V = n \in \mathring{N}$. Lad $f_1,\dots,f_p$ være selvadjungerede lineære afbildninger af V ind i V. Det forudsættes, at $\dim f_1(V) \geq 1,\dots,\dim f_p(V) \geq 1$, at

$$(1) \qquad \dim f_1(V)+\cdots+\dim f_p(V) = n ,$$

og at

$$(2) \qquad f_1+\cdots+f_p = e ,$$

hvor e betegner den identiske afbildning af V.

1° Begrund, at der findes en ortonormal basis $(\underline{e}_{i1},\dots,\underline{e}_{ir_i})$ for $f_i(V)$, således at hver af vektorerne $\underline{e}_{ij}$ er egenvektor for f_i hørende til en egenværdi $\lambda_{ij} \neq 0$. Gør rede for, at sættet

$$(*) \qquad (\underline{e}_{11},\dots,\underline{e}_{1r_1},\underline{e}_{21},\dots,\underline{e}_{2r_2},\dots,\underline{e}_{p1},\dots,\underline{e}_{pr_p})$$

består af n vektorer. Vis, at sættet frembringer V. Begrund, at sættet er en basis for V.

2° Vis, at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \underline{e}_{ij}$, og at $f_k(\underline{e}_{ij}) = \underline{0}$ for $k \neq i$. (Bevis og udnyt f.eks., at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \lambda_{ij}f_1(\underline{e}_{ij})+\cdots+\lambda_{ij}f_p(\underline{e}_{ij})$.)

3° Vis, at sættet $(*)$ er en ortonormal basis for V.

(Opgaven fortsættes)

Københavns universitet

Mat. 1, gl. ordning, prøve 1, sommeren 1969.

AG

Lad $\underline{\underline{A}}_1, \ldots, \underline{\underline{A}}_p$ være reelle symmetriske (n×n)-matricer, alle forskellige fra nulmatricen, med rg $\underline{\underline{A}}_1 + \cdots +$ rg $\underline{\underline{A}}_p = n$ og $\underline{\underline{A}}_1 + \cdots + \underline{\underline{A}}_p = \underline{\underline{E}}$.

4° Gør rede for (ved udnyttelse af det foregående), at der findes en reel ortogonal (n×n)-matrix $\underline{\underline{S}}$, således at matricerne $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{A}}_1\underline{\underline{S}}^{-1}, \ldots, \underline{\underline{S}}\underline{\underline{A}}_p\underline{\underline{S}}^{-1}$ alle er diagonalmatricer med kun 1'er og 0'er i diagonalen.

Opgave nr. 5.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en reel (m×n)-matrix, og lad $\underline{\underline{B}}$ være en reel (n×p)-matrix.

1° Vis, at rg $\underline{\underline{AB}} \leq$ rg $\underline{\underline{A}}$

2° Vis, at rg $\underline{\underline{B}} = n$ implicerer rg $\underline{\underline{AB}} =$ rg $\underline{\underline{A}}$.

3° Vis, at rg $\underline{\underline{AB}} \leq$ rg $\underline{\underline{B}}$

4° Vis, at rg $\underline{\underline{A}} = n$ implicerer rg $\underline{\underline{AB}} =$ rg $\underline{\underline{B}}$.

(Betragt f.eks. vektorrum U,V og W over $\mathbb{R}$ med dim U = p, dim V = n og dim W = m, samt passende lineære afbildninger f:U → V og g:V → W.)