Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1969.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 2.

Ingen hjælpemidler må medbringes.

Opgave nr. 1.

Hvis (S,dist) er et fuldstændigt metrisk rum og $T:S \to S$ en kontraktion, da har T netop eet fixpunkt.

Gør rede for definitionen af de begreber, der indgår i ovenstående sætning, og bevis sætningen.

Opgave nr. 2.

Undersøg om følgende par af reelle matricer er regulær-ækvivalente:

1°

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2°

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3°

$$\underline{\underline{A}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave nr. 3.

Lad $(A,(V,\mathbb{R}))$ være et affint rum af dimension 4. Fem punkter i A er givet ved deres koordinatsæt m.h.t. et valgt koordinatsystem som følger:

(Opgaven fortsættes)

Københavns universitet

Mat.1, skr.prøve 2, sommeren 1969.

$P_0:(1,1,0,0)$ $P_1:(2,0,3,0)$ $P_2:(3,1,-1,-1)$

$P_3:(0,0,1,0)$ $P_4:(2,0,0,-1)$

1° Vis, at $A_1 = \mathrm{aff}\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\}$ er en hyperplan.

2° Find en ligning for A_1.

3° Lad A_2 være hyperplanen med ligningen

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1.$$

Begrund, at $A_1 \cap A_2$ er et affint underrum, og angiv en parameterfremstilling for det.

Opgave nr. 4.

Vis, at der for $-\pi \leqq x \leqq \pi$ gælder

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} .$$