Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1969.

MATEMATIK 1

Skriftlig prøve 1.

Alle hjælpemidler kan medbringes.

## Opgave nr. 1.

Vis, at

$$\cosh nt = \frac{1}{2}[(\cosh t + \sinh t)^n + (\cosh t - \sinh t)^n], \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Vis herved, at

$$\cosh nt = P_n(\cosh t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{C},$$

hvor $P_n$ betegner polynomiet

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k,$$

$$\text{hvor} \quad m = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{1}{2}(n-1) & \text{for } n \text{ ulige.} \end{cases}$$

Vis, at

$$x^{-n}P_n(x) \to 2^{n-1} \quad \text{for} \quad x \to +\infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vis endelig, at

$$P_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right).$$

## Opgave nr. 2.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en reel $(m \times n)$-matrix, og lad $\underline{\underline{B}}$ være en reel $(n \times p)$-matrix.

1° Vis, at rg $\underline{\underline{AB}} \leq$ rg $\underline{\underline{A}}$.

2° Vis, at rg $\underline{\underline{B}} = n$ implicerer rg $\underline{\underline{AB}}$ = rg $\underline{\underline{A}}$.

(Opgaven fortsættes)

3° Vis, at rg $\underline{\underline{AB}} \leq$ rg $\underline{\underline{B}}$ .

4° Vis, at rg $\underline{\underline{A}} = n$ implicerer rg $\underline{\underline{AB}}$ = rg $\underline{\underline{B}}$.

(Betragt f.eks. vektorrum U,V og W over $\mathbb{R}$ med dim U = p, dim V = n og dim W = m, samt passende lineære afbildninger $f:U \to V$ og $g:V \to W$.)

## Opgave nr. 3.

Vis, at den uendelige række

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

er uniformt konvergent på intervallet $[0,+\infty[$.

Idet f betegner rækkens sumfunktion, skal man dernæst bevise, at

$$xf(x) \to 1 \quad \text{for} \quad x \to +\infty .$$

Vis endelig, at f er differentiabel på intervallet $[0,+\infty[$ .

## Opgave nr. 4.

Lad $(V,+,\mathbb{R},\cdot)$ være et euklidisk vektorrum med dim V = $n \in \mathbb{N}$ . Lad $f_1,\ldots,f_p$ være selvadjungerede lineære afbildninger af V ind i V. Det forudsættes at dim $f_1(V) \geq 1$, ... , dim $f_p(V) \geq 1$, at

(1) $\dim f_1(V) + \cdots + \dim f_p(V) = n,$

og at

(2) $f_1 + \cdots + f_p = e,$

hvor e betegner den identiske afbildning af V.

(Opgaven fortsættes)

$1^\circ$ Begrund, at der findes en ortonormal basis $(\underline{e}_{i1},\dots,\underline{e}_{ir_i})$ for $f_i(V)$, således at hver af vektorerne $\underline{e}_{ij}$ er egenvektorer for $f_i$ hørende til en egenværdi $\lambda_{ij} \neq 0$. Gør rede for, at sættet

$$(*) \qquad (\underline{e}_{11},\dots,\underline{e}_{1r_1}, \underline{e}_{21},\dots,\underline{e}_{2r_2},\dots,\underline{e}_{p1},\dots,\underline{e}_{pr_p})$$

består af n vektorer. Vis, at sættet frembringer V. Begrund, at sættet er en basis for V.

$2^\circ$ Vis, at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \underline{e}_{ij}$, og at $f_k(\underline{e}_{ij}) = \underline{0}$ for $k \neq i$. (Bevis og udnyt f.eks., at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \lambda_{ij}f_1(\underline{e}_{ij})+\dots+\lambda_{ij}f_p(\underline{e}_{ij})$.)

$3^\circ$ Vis, at sættet (*) er en ortonormal basis for V.

Lad $\underline{\underline{A}}_1,\dots,\underline{\underline{A}}_p$ være reelle symmetriske (n×n)-matricer, alle forskellige fra nulmatricen, med $\text{rg}\,\underline{\underline{A}}_1+\dots+\text{rg}\,\underline{\underline{A}}_p = n$ og $\underline{\underline{A}}_1+\dots+\underline{\underline{A}}_p = \underline{\underline{E}}$.

$4^\circ$ Gør rede for (ved udnyttelse af det foregående), at der findes en reel ortogonal (n×n)-matrix $\underline{\underline{S}}$, således at matricerne $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{A}}_1\underline{\underline{S}}^{-1},\dots,\underline{\underline{S}}\underline{\underline{A}}_p\underline{\underline{S}}^{-1}$ alle er diagonalmatricer med kun 1'er og 0'er i diagonalen.