Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1968-69.

M A T E M A T I K 1

Skriftlig prøve 2.

(Matematisk analyse).

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Besvarelsen betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

Ulæselige eller uforståelige afsnit af besvarelsen vil ikke blive talt med ved bedømmelsen.

Opgave nr. 1.

Find en potensrække $\Sigma\, a_n x^n$, som fremstiller funktionen

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

på et åbent interval $]-a,a[$. Angiv, hvor stor a kan vælges.

Opgave nr. 2.

Vis, at der ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \log\,(1 + n^2x^2)$$

defineres en kontinuert afbildning $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vis, at f ikke er differentiabel i 0, men differentiabel på $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Opgave nr. 3.

Vis, at den ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3y^2(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

definerede funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kontinuert i $(0,0)$, differentiabel i enhver retning i $(0,0)$, men ikke differentiabel i $(0,0)$.

(fortsættes)

Opgave nr. 4.

Lad (x_n) være en begrænset, reel talfølge. Angiv, hvorledes $\limsup (x_n^2)$ kan udtrykkes ved $\limsup (x_n)$ og $\liminf (x_n)$.

Opgave nr. 5.

Delmængden $A \subseteq \mathbb{C}$ består af alle punkter $z = x + iy$ med $|y| = 1$, alle punkter med $y > 0$ og x rational, samt alle punkter med $y < 0$ og x irrational. Undersøg for hver af punktmængderne A, $A \cup \{0\}$, $A \cup \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [0,1] \wedge y = 0\}$ om den er sammenhængende og om den er kurvesammenhængende.

Opgave nr. 6.

Vis, at enhver løsning til differentialligningen

$$(2\cos^2 x + x \sin 2x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\sin 2x - 2x\cos 2x)\frac{dy}{dx} + (4\cos^2 x)\,y = 0,$$

som er defineret på hele $\mathbb{R}$ og periodisk med periode 2π, er løsning til differentialligningen

$$\sin 2x \frac{d^2y}{dx^2} - 2\cos 2x \frac{dy}{dx} = 0.$$

Bestem for den første af ligningerne samtlige løsninger, der er periodiske med periode 2π.

[En funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siges at være periodisk med periode 2π såfremt $\forall x \in \mathbb{R}: f(x + 2\pi) = f(x)$].