Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1968-69.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 1, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, dersom 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede. Alle (helt eller delvis) besvarede opgaver medtages i bedømmelsen.

Opgave nr. 1.

To elementer g_1 og g_2 i en gruppe $(G,\cdot)$ siges at være konjugerede, dersom der findes et element $x \in G$, således at $xg_1x^{-1} = g_2$.

1° Vis, at hvis $(G,\cdot)$ har endelig orden, og g_1 og g_2 er konjugerede elementer i G, så har g_1 og g_2 samme orden.

2° Vis, at hvis $(G,\cdot)$ har endelig orden, og g_1 og g_2 er vilkårlige elementer i G, så har g_1g_2 og g_2g_1 samme orden.

Opgave nr. 2.

Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{i=1,\dots,n-1;j=1,\dots,n}$ være en reel $((n-1)\times n)$-matrix, og sæt

$$A_j = (-1)^j \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

for $j = 1,\dots,n$.

(Opgaven fortsættes)

1° Vis, at $(A_1,\dots,A_n)$ er løsning til ligningssystemet

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 & + \cdots + & a_{n-1,n}x_n & = & 0 \end{array}$$

2° Bestem for $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n-1$ den fuldstændige løsning til ligningssystemet (*).

Opgave nr. 3.

Lad $(U,+,L)$ og $(V,+,L)$ være endelig-dimensionale vektorrum, og lad $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ hhv. $(\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_m)$ være en basis i U hhv. V. Angiv en basis for vektorrummet $(\mathrm{Hom}(U,V),+,L)$ af alle lineære afbildninger af U ind i V.

Opgave nr. 4.

Lad $(V,+,\mathbb{R})$ betegne vektorrummet af alle reelle polynomier $p(t) = a_2t^2+a_1t+a_0$ af højst anden grad, herunder nulpolynomiet, på intervallet $[-1,1]$.

1° Gør rede for, at der findes netop een lineær afbildning $f: V \to V$ for hvilken

$$\begin{aligned} f(2t-1) &= 4t+1, \\ f(3t+4) &= 6t-4, \\ f(3t^2-t+1) &= 6t^2-2t-4. \end{aligned}$$

2° Bestem den til f hørende matrix m.h.t. basen $(p_0(t),p_1(t),p_2(t)) = (1,t,t^2)$.

(Opgaven fortsættes)

3° Find f's egenværdier og bestem de tilhørende egenrum.

4° Vektorrummet tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt,

$$p(t) \cdot q(t) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Undersøg, om f er selvadjungeret.

Opgave nr. 5.

Lad α være et reelt tal. Bestem mængden af reelle (2×2)-matricer, som er ortogonalækvivalente med matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Opgave nr. 6.

Lad $(V,+,\dot{R})$ være et reelt vektorrum af endelig dimension $n \geq 2$, og lad der i V være valgt en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Ved

$$Q(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n) = 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

defineres da en kvadratisk form Q på V.

1° Bestem matricen $\underline{\underline{B}}$ (m.h.t. den valgte basis) for den til Q hørende symmetriske bilinearform B.

2° Bestem ind_+B, ind_-B og rgB. (Betragt f.eks. det $(n-1)$-dimensionale underrum

$$U = \{x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n \in V \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\},$$

og udnyt, at $(x_1 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$.)