Henrik Schlichtkrull

Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1968.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 2.

(Matematisk analyse).

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Besvarelsen betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

Ulæselige eller uforståelige afsnit af besvarelsen vil ikke blive talt med ved bedømmelsen.

Opgave nr. 1.

Bestem for enhver reel værdi af λ samtlige reelle løsninger til ligningen

$$\mathrm{Arctg}\, x + \mathrm{Arctg}\, 2x = \mathrm{Arctg}\, \lambda x.$$

Opgave nr. 2.

Angiv løsningsmængden til differentialligningen

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 12x^5 - 18x^3 - 6x.$$

Opgave nr. 3.

Lad (a_n) være en følge af positive tal, som tilfredsstiller betingelsen

$$\forall n \in \mathbb{N} \left((n+2)a_{n+1} \leq na_n\right).$$

Vis, at den uendelige række Σa_n er konvergent.

Opgave nr. 4.

Vis, at følgen (φ_n), hvor $\varphi_n : \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er defineret ved

$$\varphi_n(x) = \frac{1+e^x}{(1+x^2)(n+e^x)}$$

er ligelig konvergent.

(Opgavesættet fortsætter).

Opgave nr. 5.

Lad $f:\mathbf{R}$ ind i $\mathbf{R}$ være en funktion, som tilfredsstiller følgende to betingelser:

1) Restriktionen af f til $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ er kontinuert.

2) Restriktionen af f til $\mathbf{Q}$ er kontinuert.

Vis, at f er kontinuert.

Opgave nr. 6.

Bevis, at følgende relation gælder for alle $x \in]1,2[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{x^n} = \frac{5x^2-12x+8}{(x-1)^2(2-x)^2} .$$