Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1967/68.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

1° Lad K være en endelig mængde, forsynet med en (partiel) refleksiv ordningsrelation $\underline{\underline{\prec}}$. Vis, at K har mindst et minimalt element.

2° Lad M være en endelig mængde med n elementer, forsynet med en (partiel) refleksiv ordningsrelation $\underline{\underline{\prec}}$. Vis, f.eks. ved gentagen anvendelse af resultatet i 1°, at M's elementer kan nummeres, $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, på en sådan måde, at der gælder

$$\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \; [x_i \prec x_j \Rightarrow i<j].$$

(Som sædvanlig betegner $\prec$ den til $\underline{\underline{\prec}}$ svarende irrefleksive ordningsrelation.)

Opgave nr. 2.

Lad $*$ være en komposition inden for en mængde M. Det antages, at $*$ er associativ, og at der findes et neutralt element e. Lad x og y være elementer af M, således at $z = x*y$ er regulært.

1° Vis, at hvis x er regulært, så er også y regulært.

(Opgaven fortsætter)

2° Vis ved et eksempel, at x og y begge kan være ikke-regulære. (Betragt f.eks. $(\hat{F}(\dot{N}\to\dot{N}),\circ)$. Angiv en ikke-surjektiv afbildning f og en ikke-injektiv afbildning g med $g\circ f = e$, hvor e betegner den identiske afbildning.)

Opgave nr. 3.

1° Vis, at sættet

$$(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3) = ((1,2,1),\ (3,3,0),\ (-1,0,2))$$

er en basis for $(\dot{R}^3,+,\dot{R})$, og at sættet

$$(\underline{v}_1,\underline{v}_2) = ((1,1),\ (1,-1))$$

er en basis for $(\dot{R}^2,+,\dot{R})$.

2° En lineær afbildning $f:(\dot{R}^3,+,\dot{R}) \to (\dot{R}^2,+,\dot{R})$ er med hensyn til baserne

$$(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3) = ((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1))$$

hhv.

$$(\underline{f}_1,\underline{f}_2) = ((1,0),\ (0,1))$$

givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem den til f hørende matrix $\underline{\underline{B}}$ med hensyn til baserne $(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3)$ hhv. $(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$.

(Opgaverne fortsætter)

Opgave nr. 4.

Lad $(U,+,\dot{R})$ være vektorrummet af alle på $\dot{R}$ definerede reelle funktioner, og lad $(V,+,\dot{R})$ være underrummet af alle to gange differentiable funktioner.

1° Lad $f_1, f_2, f_3 \in V$ være givet ved

$$f_1(x) = \sin x,$$

$$f_2(x) = x\cos x,$$

$$f_3(x) = x^2 \sin x.$$

Vis, at det af f_1, f_2 og f_3 frembragte underrum W af V har dimension 3.

2° Ved $\varphi(f) = D^2 f$, $f \in V$, defineres en lineær afbildning φ af $(V,+,\dot{R})$ ind i $(U,+,\dot{R})$. Vis, at $\varphi(W) = W$.

3° Vis, at φ's restriktion til W har netop én egenværdi, og bestem det tilhørende egenrum.

Opgave nr. 5.

Lad $(V,+,\dot{R},\cdot)$ være et n-dimensionalt vektorrum med indre produkt, hvori der er valgt en ortonormal basis. Vis, at der for enhver ortogonal transformation f af $(V,+,\dot{R},\cdot)$ gælder

$$|\operatorname{tr}\underline{\underline{A}}| \leq n,$$

hvor $\operatorname{tr}\underline{\underline{A}}$ betegner sporet af den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ med hensyn til den valgte basis. Bestem endvidere samtlige ortogonale transformationer f for hvilke

$$|\operatorname{tr}\underline{\underline{A}}| = n.$$

(Ved sporet af $\underline{\underline{A}}$ forstås som bekendt summen af $\underline{\underline{A}}$'s diagonalelementer.)

(Opgaverne fortsætter).

Københavns universitet

Mat.1,AG,skr.prøve vinteren 1967/68

Opgave nr. 6.

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en reel (n×n)-matrix med $\det\underline{\underline{A}} = 1$. Vis, f.eks. ved induktion, at $\underline{\underline{A}}$ ved række- og søjleoperationer kan overføres i enhedsmatricen $\underline{\underline{E}}_{n,n}$. (Ved en rækkeoperation hhv. søjleoperation forstås addition til en række hhv. søjle af en linearkombination af matricens øvrige rækker hhv. søjler.) Gælder det også omvendt, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er en reel (n×n)-matrix, som ved række- og søjleoperationer kan overføres i $\underline{\underline{E}}_{n,n}$, så er $\det\underline{\underline{A}} = 1$?