Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1967.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 1, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

Lad $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ være et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem i rummet. Om et andet sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(\hat{O};\underline{\hat{e}}_1,\underline{\hat{e}}_2,\underline{\hat{e}}_3)$ vides følgende:

1) $\hat{X}_1\hat{X}_2$-planen er parallel med den plan π, som i koordinatsystemet $X_1X_2X_3$ har ligningen

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

2) $\hat{X}_1$-aksen går igennem det punkt P, som i koordinatsystemet $X_1X_2X_3$ har koordinaterne $(2,1,0)$.

3) Punktet $\hat{O}$ ligger på X_3-aksen.

4) Projektionerne på X_3-aksen af vektorerne $\underline{\hat{e}}_1$ og $\underline{\hat{e}}_3$ er begge modsat rettede $\underline{e}_3$.

Opstil koordinattransformationsformlerne for overgang fra $\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3$ til $X_1X_2X_3$ og omvendt.

Københavns universitet

Mat.1, AG, skr.prøve sommeren 1967

Opgave nr. 2.

Lad $(G,\cdot)$ være en gruppe, og lad $a \in G$. Ved a's normalisator N_a forstås mængden af elementer i G, som er ombyttelige med a, altså

$$N_a = \{x \in G \mid xa = ax\}.$$

1° Vis, at N_a er en undergruppe af $(G,\cdot)$.

2° Overvej, at den ved

$$x \sim y \iff xax^{-1} = yay^{-1}$$

definerede relation $\sim$ i G er en ækvivalensrelation. Vis, at

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in N_a,$$

og vis dernæst, at

$$\mathrm{kl}(x) = xN_a,$$

hvor kl(x) betegner den ækvivalensklasse, som indeholder x.

3° Et element $b \in G$ siges at være konjugeret til a, dersom der findes et element $x \in G$, således at

$$b = xax^{-1}.$$

Vis, f.eks. ved benyttelse af det under 2° viste, at hvis $(G,\cdot)$ er en endelig gruppe, så er antallet af elementer i G, som er konjugerede til a, divisor i G's orden.

Opgave nr. 3.

Lad U være det af vektorerne

$$(1,2,0,-2),\quad (1,-8,4,6),\quad (1,12,-4,-10),$$

frembragte underrum af $l_2(4,\dot{R})$.

(Opgaven fortsættes)

1° Find en ortonormal basis for U.

2° Find ortogonalprojektionerne af vektoren

$$(2,1,1,3)$$

på U og $U^\perp$.

Opgave nr. 4.

Givet matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 0 & 13 & -1 \end{pmatrix}.$$

1° Find de karakteristiske rødder for $\underline{\underline{A}}$.

2° Undersøg, om $\underline{\underline{A}}$ er regulær-ækvivalent med en diagonalmatrix.

Opgave nr. 5.

1° Lad $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ være de komplekse rødder i polynomiet $x^p-\mu$, hvor $p \in \mathbb{N}$ og $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Vis, at der for $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ og $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_{n,n}$ gælder

$$(\underline{\underline{A}}^p - \mu\underline{\underline{E}}) = (\underline{\underline{A}} - \lambda_1\underline{\underline{E}}) \cdots (\underline{\underline{A}} - \lambda_p\underline{\underline{E}}).$$

2° Lad f være en lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum (V,+,L) ind i sig selv, og lad $p \in \mathbb{N}$. Det er velkendt, at hvis λ er egenværdi for f, så er λ^p egenværdi for f^p. (Beviset herfor ønskes ikke.) Vis, f.eks. ved benyttelse af det under 1° viste, at for $L = \mathbb{C}$ gælder også det omvendte: Er μ egenværdi for f^p, så findes en egenværdi λ for f med $\lambda^p = \mu$.