Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1966/67.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 1, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

I rummet tænkes valgt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Med l_1 betegnes linien med parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2s, \\ x_2 &= s, \quad s \in \mathbb{R}, \\ x_3 &= -1 \quad , \end{aligned}$$

og med l_2 skæringslinien mellem planerne med ligningerne

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &= 16. \end{aligned}$$

1° Gør rede for, at linierne l_1 og l_2 er vindskæve.

2° Vis, at der findes netop én linie m, der er parallel med vektoren $\underline{v}(1,1,0)$ og skærer både l_1 og l_2, og find skæringspunkternes koordinatsæt.

Opgave nr. 2.

Lad der være givet en permutation f af en endelig mængde E.

(Opgaven fortsættes)

1° Vis, at der defineres en ækvivalensrelation i E ved

$$x \sim y \iff \exists_{N_0} n: f^{\circ n}(x) = y.$$

(Benyt, at f har en endelig orden p i gruppen af alle permutationer af E.)

2° Lad A betegne en vilkårlig af ækvivalensklasserne og k antallet af elementer i A. Gør rede for, at for hvert $a \in A$ er elementerne

$$a, f(a), f^{\circ 2}(a), \ldots, f^{\circ(k-1)}(a)$$

indbyrdes forskellige, og for, at de netop udgør A.

3° Bestem samtlige ækvivalensklasser for $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ og

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Opgave nr. 3.

Lad $(G,\cdot)$ være en gruppe. Vis, at hvis en delmængde A af G er en venstre sideklasse til en undergruppe af $(G,\cdot)$, gælder

$$\forall_A x,y,z: xy^{-1}z \in A.$$

Vis omvendt, at hvis dette gælder for en ikke tom delmængde A af G, er A en venstre sideklasse til netop én undergruppe af $(G,\cdot)$.

Opgave nr. 4.

Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b & a+c & a+d \\ 1 & b+a & 0 & b+c & b+d \\ 1 & c+a & c+b & 0 & c+d \\ 1 & d+a & d+b & d+c & 0 \end{vmatrix}$$

hvor a, b, c, d betegner vilkårlige tal.

Opgave nr. 5.

I et n-dimensionalt vektorrum $(V, +, \dot{R})$ tænkes valgt en basis. Med hensyn til denne bestemmes ved $(n \times n)$-matricen

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} - \frac{2}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \ldots a_n)$$

en lineær afbildning f af V ind i sig selv. Her betegner $\underline{\underline{E}}$ enhedsmatrix og $a_1, \ldots, a_n$ reelle tal, som ikke alle er lig med 0.

1° Vis, at vektoren $\underline{a}(a_1, \ldots, a_n)$ er egenvektor for f.

2° Vis, at f er involutorisk.

3° Bestem egenværdierne for f og disses multipliciteter.

- oOo -

Der lægges vægt på besvarelsens udformning, herunder formuleringen af teksten og udførelsen af eventuelle figurer.

Besvarelsen ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun hvis særlige omstændigheder taler derfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.