Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1966.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 2, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

I denne opgave betragtes $(n \times n)$-matricer med elementer fra et tallegeme L. Enhedsmatricen betegnes med $\underline{\underline{E}}$. Idet α og β er naturlige tal $\leqq n$, betegnes med $\underline{\underline{C}}_{\alpha\beta}$ den matrix, hvor elementet i α-te række og β-te søjle er 1, medens alle øvrige elementer er 0. Det forudsættes, at $\alpha \neq \beta$. Endelig er $k \in L$.

1° Find determinanten for matricen $\underline{\underline{E}} + k\underline{\underline{C}}_{\alpha\beta}$.

2° Giv for en vilkårlig $(n \times n)$-matrix $\underline{\underline{A}}$ en simpel beskrivelse af, hvorledes matricen $(\underline{\underline{E}} + k\underline{\underline{C}}_{\alpha\beta})\underline{\underline{A}}$ fremgår af $\underline{\underline{A}}$.

3° Find den inverse til matricen $\underline{\underline{E}} + k\underline{\underline{C}}_{\alpha\beta}$. (Man kan med fordel benytte 2°.)

Opgave nr. 2.

I planen er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem.

1° Vis, at der gennem de fem punkter $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ og $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ går en og kun en algebraisk kurve af 2. orden, og angiv denne ved en ligning.

2° Gør rede for, at kurven er en ellipse. Angiv centret og akseretningerne.

Opgave nr. 3.

Inden for mængden $\dot{R}^2$ af par af reelle tal defineres en komposition $*$ ved

$$(a_1,a_2) * (b_1,b_2) = (a_1b_1+a_2b_2 \; , \; a_1b_2+a_2b_1).$$

1° Vis, at der ved

$$(a_1,a_2) \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

defineres en isomorf afbildning af $(\dot{R}^2, *)$ på en mængde af reelle (2×2)-matricer med matrixmultiplikation som komposition.

2° Begrund, at $*$ er kommutativ og associativ, samt at der findes et neutralt element. Angiv de invertible (regulære) elementer.

3° Lad $(G,*)$ betegne gruppen af invertible elementer i $(\dot{R}^2,*)$. Gør rede for, at

$$H = \left\{ (a_1,a_2) \in \dot{R}^2 \;\middle|\; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = 1 \right\}$$

er en normal undergruppe af $(G,*)$, og beskriv inddelingen af G i sideklasser til H.

Opgave nr. 4.

1° Find en simpel udsagnsform, hvori kun de to udsagnsvariable p og q indgår, og som er ækvivalent med udsagnsformen

$$" (p \wedge r) \vee q \iff p \wedge (r \vee q) " .$$

2° Om tre delmængder A, B og C af en universalmængde E er givet, at

$$(A \cap C) \cup B = A \cap (C \cup B).$$

Udtryk dette så simpelt som muligt. Giv med benyttelse af 1° en begrundelse for, at den nye, simplere formulering virkelig udtrykker det givne.

Opgave nr. 5.

Med f betegnes en lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum $(V,+,L)$ ind i sig selv. Den identiske afbildning af V betegnes med e.

1° Lad $\underline{v}$ være en egenvektor for f hørende til egenværdien $\lambda \in L$. Idet $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p \in L$, skal man vise, at $\underline{v}$ ligeledes er egenvektor for den lineære afbildning

$$a_0 e + a_1 f + a_2 f^{\circ 2} + \ldots + a_p f^{\circ p} ,$$

samt angive den tilsvarende egenværdi.

2° Det forudsættes her, at der findes en basis for $(V,+,L)$ bestående af egenvektorer for f. Bestem afbildningen

$$b_0 e + b_1 f + b_2 f^{\circ 2} + \ldots + b_n f^{\circ n} ,$$

hvor $b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n$ er det karakteristiske polynomium for f .

- oOo -

Der lægges vægt på besvarelsens udformning, herunder formuleringen af teksten og udførelsen af eventuelle figurer.

Besvarelsen ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun hvis særlige omstændigheder taler derfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.