Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1965-66.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 2, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

1° Hvor mange gruppekompositioner med o som neutralt element findes der inden for en mængde med 3 elementer o, p og q ? Opskriv kompositionstavle(r).

2° Gør rede for, at der pånær isomorfi højst findes ét legeme med 3 elementer. - Findes der et ?

Opgave nr. 2.

1° Angiv en bijektiv afbildning af mængden $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ af følger af naturlige tal på mængden af strengt voksende følger af naturlige tal.

2° Gør rede for, at de nævnte mængder har samme kardinaltal som mængden $\mathbb{D}(\mathbb{N})$ af delmængder af $\mathbb{N}$.

Opgave nr. 3.

Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$ være en ortonormal basis i et vektorrum $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ med indre produkt, og lad F være det volumenmål i vektorrummet, for hvilket $F(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n) = 1$. Idet $(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n)$ er et sæt af vektorer i V, skal man finde en sammenhæng mellem

$$\begin{vmatrix} \underline{v}_1\cdot\underline{v}_1 & \underline{v}_1\cdot\underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_1\cdot\underline{v}_n \\ \underline{v}_2\cdot\underline{v}_1 & \underline{v}_2\cdot\underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_2\cdot\underline{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{v}_n\cdot\underline{v}_1 & \underline{v}_n\cdot\underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n\cdot\underline{v}_n \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad F(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n).$$

(Søg først et udtryk for matricen $(\underline{v}_i\cdot\underline{v}_k)_{i=1,\ldots,n\,;\,k=1,\ldots,n}$ ved $(n \times n)$-matricen $\underline{\underline{A}}$, bestemt ved

$$(\underline{v}_1\ \underline{v}_2\ \ldots\ \underline{v}_n) = (\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \ldots\ \underline{e}_n)\ \underline{\underline{A}}\quad .)$$

Opgave nr. 4.

1° Skriv permutationen

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

af mængden $\{1,2,3,4,5\}$ som sammensætning af transpositioner.

2° Bestem ordenen af p i den symmetriske gruppe $(S_5,\circ)$ af alle permutationer af $\{1,2,3,4,5\}$.

3° Idet J betegner antallet af inversioner ved en permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

af mængden $\{1,2,\ldots,n\}$ med sædvanlig ordning, skal man finde antallet af inversioner ved permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Mat.1, AG, skr.prøve vinter 1965-66.

Opgave nr. 5.

I et vektorrum $(V,+,\mathbb{R})$ med dim $V = 2n$ tænkes valgt en basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_{2n-1}, \underline{e}_{2n})$. Med f betegnes en lineær afbildning af vektorrummet på sig selv med matrixligning

$$\underline{\underline{v}}_| = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{u}}_| ,$$

hvor matricen $\underline{\underline{A}}$ er af formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

med $a_i > 0$, $i = 1,\ldots,2n$.

1° Vis, at underrummet udspændt af to basisvektorer $\underline{e}_p$ og $\underline{e}_q$ med $p + q = 2n + 1$ er invariant ved afbildningen f. Vis videre, at der af dette underrum kan udtages to lineært uafhængige egenvektorer for f. (Betragt restriktionen af f til underrummet.)

2° Gør rede for, at man ved overgang til en ny basis for vektorrummet $(V,+,\mathbb{R})$ kan opnå, at matricen i matrixligningen for f bliver en diagonalmatrix.

- oOo -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af eventuelle figurer.

Besvarelserne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler derfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.