Københavns universitet

<u>Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1965</u>.

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 1, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

$1^\circ$ Hvad kan sluttes om de to afbildninger $f: A \to B$ og $g: B \to A$, når det er givet, at $g \circ f: A \to A$ er surjektiv, medens $f \circ g: B \to B$ er injektiv?

$2^\circ$ Hvad kan sluttes om de tre afbildninger $r: K \to L$, $s: L \to M$ og $t: M \to K$, når det er givet, at $t \circ s \circ r: K \to K$ og $r \circ t \circ s: L \to L$ er surjektive, medens $s \circ r \circ t: M \to M$ er injektiv ?

Opgave nr. 2.

Idet der er givet et reelt polynomium a af grad $k \geq 1$, betragtes den lineære afbildning f af vektorrummet $(\hat{P}(\hat{R} \to \hat{R}),+,\hat{R})$ af alle reelle polynomier ind i sig selv givet ved

$$p \to aDp - pDa, \qquad p \in \hat{P}(\hat{R} \to \hat{R}),$$

hvor Da og Dp betegner de afledede af polynomierne a og p.

$1^\circ$ Vis, at for et polynomium p af grad $m \neq k$ er billedpolynomiet af grad $k + m - 1$.

$2^\circ$ Bestem kernen for afbildningen f.

$3^\circ$ Angiv for hvert $n \in \hat{N}$ dimensionen af $f(\hat{P}_n)$, hvor $\hat{P}_n$ er underrummet bestående af de reelle polynomier af højst n-te grad samt nulpolynomiet.

## Opgave nr. 3.

1° Vis, at $A = \{m + n\sqrt{3} \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ er en delring af de reelle tals legeme $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

2° I A defineres ved

$$m + n\sqrt{3} \sim m' + n'\sqrt{3} \iff m \equiv m' \pmod 2 \;\wedge\; n \equiv n' \pmod 2$$

en ækvivalensrelation $\sim$ . (Begrundelse ønskes ikke.)

Vis, at $\sim$ harmonerer med kompositionerne i ringen $(A,+,\cdot)$.

3° I kraft af 2° organiseres mængden $\tilde{A}$ af ækvivalensklasser som en ring $(\tilde{A},\tilde{+},\tilde{\cdot})$ ved regning med repræsentanter. (Begrundelse ønskes ikke.)

Angiv antallet af ækvivalensklasser samt en mængde bestående af én repræsentant for hver klasse. Opskriv kompositionstavle for $(\tilde{A},\tilde{\cdot})$. Er ringen $(\tilde{A},\tilde{+},\tilde{\cdot})$ en integritetsring ?

## Opgave nr. 4.

1° Idet f er en drejning af rummet om en linie l og s spejlingen af rummet i en plan $\pi$, skal man gøre rede for, at $s \circ f \circ s$ er en drejning om spejlbilledet s(l) af linien l med hensyn til planen $\pi$.

(Vi tilføjer, at idet linien l tænkes orienteret, hvilket giver anledning til en orientering også af spejlbilledet s(l), og idet omløbsretningen om en orienteret linie modsat urvisernes, set fra liniens positive ende, regnes positiv, gælder der endvidere: er $\varphi$ et vinkeltal for drejningen f, vil $-\varphi$ være et vinkeltal for drejningen $s \circ f \circ s$. Dette ønskes ikke begrundet, men kan benyttes i 2°.)

2° Lad g og h være drejninger af rummet om to hinanden skærende

(opgaven fortsættes)

linier m og n. Idet spejlingen i den ved m og n bestemte plan betegnes med t, skal man påvise, at $t \circ g^{-1} \circ t = g$, og at

$$g \circ h = t \circ (h \circ g)^{-1} \circ t,$$

samt ud fra det sidste resultat beskrive sammenhængen mellem $g \circ h$ og $h \circ g$ geometrisk.

Opgave nr. 5.

Lad $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ være et parallelkoordinatsystem i rummet.

Om en lineær afbildning f af vektorrummet $(V_3,+,\mathbb{R})$ af geometriske vektorer ind i sig selv er givet, at $f(\underline{e}_1)$, $f(\underline{e}_2)$ og $f(\underline{e}_3)$ er stedvektorer for punkter i planen med ligningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = k,$$

hvor k er et givet reelt tal.

Vis, at k er en egenværdi for den lineære afbildning f. (Benyt matricen for f med hensyn til basen $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$.)

- oOo -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af eventuelle figurer.

Besvarelserne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler derfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.