Københavns universitet

<u>Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1964-65.</u>

M A T E M A T I K 1.

Skriftlig prøve 1, algebra og geometri.

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

To planer er i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $X_1X_2X_3$ i rummet givet ved ligningerne

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5,$$
$$14x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11.$$

1° Beregn cosinus til den spidse vinkel mellem planerne.

2° Find en ligning for halveringsplanen for den spidse vinkel mellem planerne.

Opgave nr. 2.

1° Find den mindste delring L_1 af de rationale tals legeme $(Q,+,\cdot)$, som indeholder tallet $\frac{1}{10}$. Angiv endvidere de regulære elementer ved multiplikationen inden for L_1.

2° Find den mindste delring L_2 af $(Q,+,\cdot)$, som indeholder begge tallene $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{6}$. Angiv de regulære elementer ved multiplikationen inden for L_2.

3° Er ringene $(L_1,+,\cdot)$ og $(L_2,+,\cdot)$ isomorfe? Er grupperne $(L_1,+)$ og $(L_2,+)$ isomorfe?

Opgave nr. 3.

Med $\underline{\underline{A}}$ betegnes matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ a & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem for hvert $a \in \mathbb{R}$ samtlige løsninger $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ til ligningen

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Angiv endvidere for hvert $a \in \mathbb{R}$ rangen rg $\underline{\underline{A}}$ af matricen $\underline{\underline{A}}$.

Opgave nr. 4.

Inden for mængden $\mathfrak{P}(E)$ af delmængder af en mængde E defineres ved

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

en kommutativ gruppekomposition $+$. (Begrundelse ønskes ikke.)

1° For vilkårlige $A, B, C \in \mathfrak{P}(E)$ skal man, for eksempel ved en figur, beskrive mængden $A + B + C$. Find endvidere det neutrale element i gruppen $(\mathfrak{P}(E), +)$, samt det inverse til et vilkårligt $A \in \mathfrak{P}(E)$.

2° Ud fra to mængder E_1 og E_2 defineres som ovenfor grupper $(\mathfrak{P}(E_1), +)$, henholdsvis $(\mathfrak{P}(E_2), +)$. Hvilken egenskab ved en afbildning $f: E_1 \to E_2$ er nødvendig og tilstrækkelig for, at den tilsvarende mængdeafbildning er en homomorf afbildning af $(\mathfrak{P}(E_1), +)$ ind i $(\mathfrak{P}(E_2), +)$?

Opgave nr. 5.

Idet $F\colon V^n \to L$ er et volumenmål i et n-dimensionalt vektorrum $(V,+,L)$, medens f er en lineær afbildning af $(V,+,L)$ ind i sig selv, defineres ved

$$G(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_n) = F(f(\underline{u}_1),\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_n) + F(\underline{u}_1,f(\underline{u}_2),\ldots,\underline{u}_n) + \ldots + F(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,f(\underline{u}_n))$$

en funktion $G\colon V^n \to L$.

1° Vis, at G er en alternerende n-linearform, og begrund derved eksistensen af en konstant $c \in L$, således at

$$\forall_{V} \underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_n : G(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_n) = c\, F(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_n).$$

2° Idet $(a_{ij})_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n}$ er matricen for den lineære afbildning f med hensyn til en basis $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n$ for $(V,+,L)$, skal man vise, at

$$c = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

- oOo -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af eventuelle figurer.

Besvarelserne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler derfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.