Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1964.

MATEMATIK 1.

Skriftlig prøve 1, (algebra og geometri).

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis 4 af nedenstående 5 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

1° Idet der er valgt et fast punkt O i rummet, medens $\underline{a}$ og $\underline{b}$ er givne, indbyrdes forskellige geometriske vektorer, skal man give en geometrisk karakterisering af punktmængden

$$\{P \mid \exists_R \lambda \ [\overrightarrow{OP} = \lambda \underline{a} + (1-\lambda)\underline{b}]\}.$$

2° Lad S være et siderum i et vektorrum $(V,+,L)$, altså $S = \underline{c} + U$, hvor $\underline{c}$ er en vektor og U et underrum af $(V,+,L)$. Vis, at S med to vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ indeholder samtlige vektorer $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$, $\lambda \in L$.

3° Om en ikke tom mængde T af vektorer i vektorrummet $(V,+,L)$ antages omvendt

$$\underline{x} \in T \ \wedge \ \underline{y} \in T \ \Rightarrow \ \forall_L \lambda \ [\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in T].$$

En vektor $\underline{d} \in T$ tænkes valgt. Vis, at T med to vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ også indeholder vektoren $\underline{x} + \underline{y} - \underline{d}$. Vis, at

$$(-\underline{d}) + T = \{\underline{x} - \underline{d} \mid \underline{x} \in T\}$$

er et underrum af $(V,+,L)$.

Opgave nr. 2.

1° Lad m og k være naturlige tal. Idet A er en restklasse modulo m, altså $A \in \check{Z}_m$, skal man vise, at mængden $\{ka \mid a \in A\}$

er en restklasse modulo km. Vis videre, at afbildningen $f\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{km}$ bestemt ved

$$(x)_m \to (kx)_{km}, \quad x \in \mathbb{Z},$$

er en homomorf afbildning af $(\mathbb{Z}_m,+)$ ind i $(\mathbb{Z}_{km},+)$. - Med $(x)_m$ betegnes den af tallet $x \in \mathbb{Z}$ repræsenterede restklasse modulo m.

2° Gør rede for, at restklasseringen $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ har et med $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ isomorft dellegeme.

3° Idet m er et givet naturligt tal, skal man undersøge, for hvilke $k \in \mathbb{N}$ afbildningen $f\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{km}$, ligesom i 1° bestemt ved

$$(x)_m \to (kx)_{km}, \quad x \in \mathbb{Z},$$

er en homomorf afbildning af restklasseringen $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ ind i restklasseringen $(\mathbb{Z}_{km},+,\cdot)$.

Opgave nr. 3.

Lad $(V,+,\mathbb{R},\cdot)$ være et endelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt, og lad underrummene U' og U'' være ortogonale, $U' \perp U''$. Lad endvidere $pr'\colon V \to V$ være den afbildning, hvor hver vektor i V som billede har sin ortogonale projektion på U', ligesom pr'' betegner ortogonalprojektionen af V på U''.

1° Man skal for en vilkårlig vektor $\underline{v} \in V$ vise, at $\underline{v} - pr'(\underline{v}) - pr''(\underline{v})$ er ortogonal såvel på U' som på U''. Gør derpå rede for, at afbildningen $pr' + pr''$ er en ortogonalprojektion.

2° Det forudsættes nu, at $\dim V = 3$, og en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ tænkes valgt. Find koordinaterne til den ortogonale projektion af vektoren $\underline{v}(1,1,6)$ på underrummet udspændt af $\underline{u}'(1,1,0)$ og $\underline{u}''(1,-1,2)$.

Opgave nr. 4.

1° Reducer udsagnsformen

$$" (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \iff q "$$

til den simplest mulige dermed ækvivalente udsagnsform.

2° Om to delmængder A og B af en universalmængde E er givet

$$(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = B.$$

Udtryk dette så simpelt som muligt. Giv med benyttelse af 1° en begrundelse for, at den nye, simplere formulering virkelig udtrykker det givne.

Opgave nr. 5.

Bestem det karakteristiske polynomium hørende til matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$ er givne tal. Polynomiet må gerne skrives som produkt af polynomier af lavere grad. (Man kan benytte induktion.)

- oOo -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af eventuelle figurer.

(fortsættes)

Besvarelserne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler derfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.